Test de calcul propositionnel et théorie des ensembles

Exercice 1 : Logique propositionnelle

1. Parmi les tables de vérité en figure 1, laquelle (lesquelles) est (sont) celle(s) de l'implication $(A \Rightarrow B)$.

(a)

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	
ff	ff	tt
ff	tt	ff
tt	ff	ff
tt	tt	ff

(b)

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	ff	ff
tt	tt	tt

(c)

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	
ff	ff	tt
ff	tt	ff
tt	ff	ff
tt	tt	tt

(d)

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	
ff	ff	tt
ff	tt	ff
tt	ff	tt
tt	tt	tt

FIGURE 1 – Tables de vérité

Solution: La réponse (b).

2. Écrire la table de vérité de la formule

$$\big((A \vee B) \wedge (\neg A)\big)$$

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$\big[(A \vee B)\big]_\sigma$	$\big[(\neg A)\big]_\sigma$	$\Big[\big((A \vee B) \wedge (\neg A)\big)\Big]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	ff
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	tt	ff	ff
tt	tt	tt	ff	ff

Exercice 2 : Ensembles

1. Exprimer les ensembles colorés en gris sur la figure 2 en fonction de A, B et C en utilisant les connecteurs $\cup$, $\cap$, $\setminus$ et Δ.

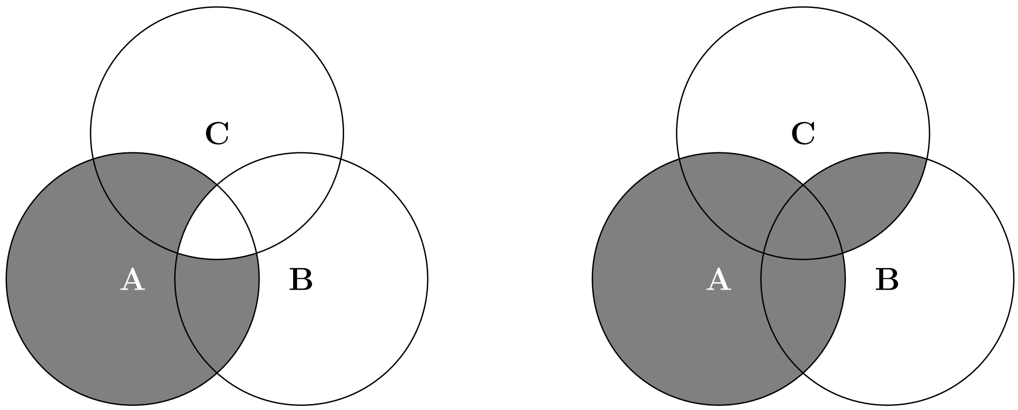

FIGURE 2 – Des ensembles

Solution: Il y a une infinité de solutions, dont plusieurs solutions simples. Mais de bonnes solutions sont :
- Pour le premier, $A \setminus (B \cap C)$
- Pour le second $A \cup (B \cap C)$.

2. Dessiner les diagrammes de VENN (diagramme patates) de
- $A \cap B$
- $A \setminus B$

Solution:

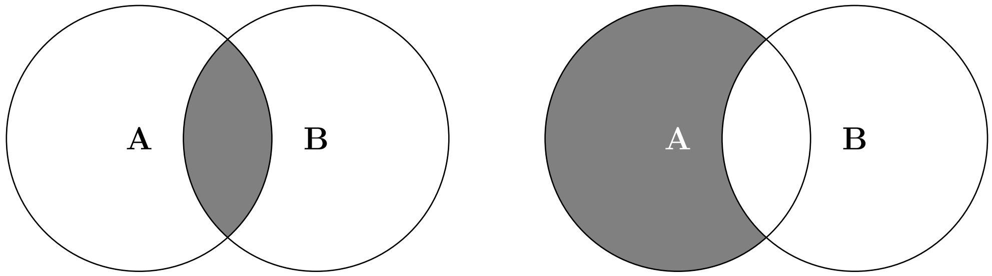

FIGURE 3 – Solution

Exercice 3 : Récurrence

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2$$
$$u_{n+1} = 2u_n - n$$

Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + n + 1$$

Solution: Soit P_n le prédicat $u_n = 2^n + n + 1$ sur $\mathbb{N}$. Prouvons P_n par récurrence sur n.

— Initialisation : Pour $n = 0$; on a $u_n = 2$ et $2^n + n + 1 = 2^0 + 0 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$. P_0 est donc vrai.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n, prouvons P_{n+1}.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2u_n - n \\
u_{n+1} &= 2(2^n + n + 1) - n \\
u_{n+1} &= 2^{n+1} + 2n + 2 - n \\
u_{n+1} &= 2^{n+1} + n + 2 \\
u_{n+1} &= 2^{n+1} + (n+1) + 1
\end{aligned}$$

D'où P_{n+1}.

P_0 est vrai et $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vrai ($\forall n \in \mathbb{N}, P_n$).