Test de calcul propositionnel, relations et fonctions

Exercice 1 : Logique propositionnelle

1. Écrire la table de vérité de la formule

$$\big(A \land (A \Rightarrow B)\big)$$

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$\big[(A \Rightarrow B)\big]_\sigma$	$\Big[\big(A \land (A \Rightarrow B)\big)\Big]_\sigma$
ff	ff	tt	ff
ff	tt	tt	ff
tt	ff	ff	ff
tt	tt	tt	tt

Exercice 2 : Relations

On se donne un ensemble E et $\mathcal{R}$ une relation sur E.

1. Associer chaque propriété avec son nom :
   i. Antisymétrie
   ii. Réflexivité
   iii. Transitivité
   iv. Symétrie

   a. $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
   b. $\forall (x, y) \in E^2, \big(x\mathcal{R}y \land y\mathcal{R}x\big) \Rightarrow x = y$
   c. $\forall (x, y, z) \in E^3, \big(x\mathcal{R}y \land y\mathcal{R}z\big) \Rightarrow x\mathcal{R}z$
   d. $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$

Solution:

i. b.
ii. d.
iii. c.
iv. a.

2. Quelles propriétés doivent être vérifiées pour que $\mathcal{R}$ soit une relation d'équivalence ? d'ordre ?

Solution: Équivalence : réflexivité, symétrie et transitivité.
Ordre : réflexivité, antisymétrie et transitivité

Exercice 3 : Fonctions

Soit
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

1. Est-ce que f est injective ?

Solution: Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On suppose que $f(a) = f(b)$. On a donc :
$$\begin{aligned} \frac{a+1}{a-1} = \frac{b+1}{b-1} &\Leftrightarrow (a+1)(b-1) = (b+1)(a-1) \\ &\Leftrightarrow ab + b - a - 1 = ab - b + a - 1 \\ &\Leftrightarrow 2b = 2a \\ &\Leftrightarrow b = a \end{aligned}$$
Donc f est injective.

2. Est-ce que f est surjective ?

Solution: Soit $y \in \mathbb{R}$, résolvons en $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'équation $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \\ &\Leftrightarrow x + 1 = y(x-1) \\ &\Leftrightarrow x + 1 = yx - y \\ &\Leftrightarrow 1 + y = yx - x \\ &\Leftrightarrow 1 + y = x(y-1) \\ &\Leftrightarrow \frac{1+y}{y-1} = x \text{ si } y \neq 1 \end{aligned}$$

Que se passe-t-il si $y = 1$? On a alors $x + 1 = x - 1$, donc $1 = -1$, ce qui est toujours faux. Donc 1 n'a pas d'antécédent, donc f n'est pas surjective.

3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et g la fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à n associe le quotient de la division euclidienne de n par d (qu'on peut noter $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$). Cette fonction est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? (Attention, cela peut dépendre de d.)

Solution: Elle est surjective puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, n admet dn comme antécédent.
Cependant, si $d > 1$, elle n'est pas injective car on a alors $g(0) = 0 = g(1)$.
Si $d = 1$, $g = Id_{\mathbb{N}}$, donc elle est injective (et bijective).