DM d'algèbre linéaire

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

À rendre en groupe de 1 à 2. 2 si possible !

Ne vous retenez pas de le faire en LaTeX si vous le sentez. Vous gagnerez le bonus de l'indulgence du correcteur.

À chaque fois que vous faites une preuve ressemblante à une déjà faite, vous pouvez aller plus vite.

Exercice 1 : Dérivation discrète

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On se donne la fonction

$$\begin{aligned} \Delta : E &\to E \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

appelée dérivation discrète.

1. Soit $P = X^2 + X$. Calculer $\Delta(P)$.
2. Montrer que Δ est un endomorphisme.
3. Trouver $\mathrm{Ker}\,(\Delta)$. Est-ce que Δ est injective ?
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, montrer que $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$.

Exercice 2 : Cœur et nilespace

Soit E un espace vectoriel de dimension n finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f^n = \begin{cases} Id & \text{si } n = 0 \\ f \circ f^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $k \geqslant 1$. Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right) \subseteq \mathrm{Im}\left(f^k\right)$.

2. Montrer que $\forall k \geqslant 1, \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right) \Rightarrow \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{k+2}\right)$.
3. Prouver qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \left(k < p \Rightarrow \operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)\right) \wedge \left(k \geqslant p \Rightarrow \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)\right)$.
4. Montrer que $p \leqslant n$.
5. Montrer $\forall k \geqslant 1, \left(k < p \Rightarrow \operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right) \subsetneq \operatorname{Im}\left(f^k\right)\right) \wedge \left(k \geqslant p \Rightarrow \operatorname{Im}\left(f^k\right) = \operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)\right)$.
6. Démontrer que $\operatorname{Ker}(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p) = \{0\}$. $\operatorname{Ker}(f^p)$ est appelé nilespace de f et $\operatorname{Im}(f^p)$ est son cœur.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension n finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.
   (a) Montrer que n est pair et exprimer $\operatorname{rg}(f)$ en fonction de n.
   (b) Montrer que $f \circ f = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ puis $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.