DM d'algèbre linéaire

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

À rendre en groupe de 1 à 2. 2 si possible !

Ne vous retenez pas de le faire en LaTeX si vous le sentez. Vous gagnerez le bonus de l'indulgence du correcteur.

À chaque fois que vous faites une preuve ressemblante à une déjà faite, vous pouvez aller plus vite.

Exercice 1 : Dérivation discrète

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On se donne la fonction

$$\begin{aligned} \Delta : E &\to E \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

appelée dérivation discrète.

1. Soit $P = X^2 + X$. Calculer $\Delta(P)$.

Solution:

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= P(X+1) - P(X) \\ &= (X+1)^2 + X + 1 - X^2 - X \\ &= X^2 + 2X + 1 + X + 1 - X^2 - X \\ &= 2X + 2 \end{aligned}$$

2. Montrer que Δ est un endomorphisme.

Solution: Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\Delta(P+Q) &= (P+Q)(X+1) - (P+Q)(X)\\ &= P(X+1) - P(X) + Q(X+1) - Q(X)\\ &= \Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P) &= (\lambda P)(X+1) - (\lambda P)(X)\\ &= \lambda P(X+1) - \lambda P(X)\\ &= \lambda \Delta(P)\end{aligned}$$

Δ est donc un morphisme.

Si P est un polynôme, alors $P(X+1) - P(X)$ aussi. C'est donc un endomorphisme.

3. Trouver $\operatorname{Ker}(\Delta)$. Est-ce que Δ est injective ?

Solution: On cherche à résoudre en P l'équation $\Delta(P) = 0$, ie. $P(X+1) = P(X)$, c'est à dire que P est 1-périodique. Un polynôme 1-périodique, ça pue ! Au doigt mouillé, un polynôme n'a pas plus de min ou max locaux que son degré -1.

On peut être plus précis. Regardons le polynôme $Q := P(X) - P(0)$. $Q(0) = 0$. Comme P est 1-périodique, Q aussi. Donc $\forall n \in \mathbb{Z}, Q(n) = 0$. Donc Q a une infinité de racines. Donc Q est le polynôme nul, donc $P(X) = P(0)$.

Par conséquent $\operatorname{Ker}(\Delta) = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0[X]$, les polynômes constants.

Le noyau de Δ n'est pas réduit à 0, donc Δ n'est pas injective.

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, montrer que $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$.

Solution: Le coefficient en X^n de $\Delta(P)$ est nul. Le coefficient en X^{n-1} est $na_n \neq 0$. Donc $\Delta(P) = n - 1$.

Exercice 2 : Cœur et nilespace

Soit E un espace vectoriel de dimension n finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f^n = \begin{cases} Id & \text{si } n = 0 \\ f \circ f^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $k \geqslant 1$. Montrer que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(f^k\right)$.

Solution: Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$. On a donc $f^k(x) = 0$, donc $f^{k+1} = f(0) = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$. Donc $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$.
Soit $y \in \operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)$. Il existe x tel que $f^{k+1}(x) = y$. On peut écrire $f^k(f(x)) = y$. Donc $y \in \operatorname{Im}\left(f^k\right)$, d'antécédent $f(x)$. Donc $\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)) \subseteq \operatorname{Im}\left(f^k\right)$.

2. Montrer que $\forall k \geqslant 1, \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right) \Rightarrow \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{k+2}\right)$.

Solution: Soit $k \geqslant 1$. On suppose $\operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$. On veut montrer $\operatorname{Ker}\left(f^{k+2}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$, l'inclusion inverse vient de la question précédente. Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(f^{k+2}\right)$. On a $f(x) \in \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$, donc $f(x) \in \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$. Donc $x \in \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$. D'où l'implication.

3. Prouver qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, (k < p \Rightarrow \operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)) \wedge (k \geqslant p \Rightarrow \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right))$.

Solution: La suite $(\dim \operatorname{Ker}\left(f^k\right))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante. S'il n'existe pas de tel p, alors elle est strictement croissante. Ce qui est impossible car elle est majorée par n. Donc il existe un premier rang p où la suite est localement constante. D'après la question précédente, elle est stationnaire à partir de là.

4. Montrer que $p \leqslant n$.

Solution: On utilise encore l'argument de dimension. Si $p > n$ alors la suite des noyaux des f^k est strictement croissante sur plus de rang que n, donc la dimension dépasserait n. Donc $p \leqslant n$.

5. Montrer $\forall k \geqslant 1, (k < p \Rightarrow \mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right) \subsetneq \mathrm{Im}\left(f^{k}\right)) \wedge (k \geqslant p \Rightarrow \mathrm{Im}\left(f^{k}\right) = \mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right))$.

> **Solution:** Il suffit d'utiliser le théorème du rang, puisque $\dim \mathrm{Ker}\left(f^{k}\right) \neq \dim \mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right)$ implique $\dim \mathrm{Im}\left(f^{k}\right) \neq \dim \mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right)$. Tout comme $\dim \mathrm{Ker}\left(f^{k}\right) = \dim \mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right)$ implique $\dim \mathrm{Im}\left(f^{k}\right) = \dim \mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right)$.

6. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \cap \mathrm{Im}\,(f^p) = \{0\}$. $\mathrm{Ker}\,(f^p)$ est appelé nilespace de f et $\mathrm{Im}\,(f^p)$ est son cœur.

> **Solution:** On veut montrer que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \cap \mathrm{Im}\,(f^p) = \{0\}$.
> Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f^p) \cap \mathrm{Im}\,(f^p)$. Comme $x \in \mathrm{Ker}\,(f^p)$, on a $f^p(x) = 0$ et comme $x \in \mathrm{Im}\,(f^p)$, il existe a tel que $f^p(a) = x$. Donc $f^p(f^p(a)) = f^p(x) = 0$. Donc $a \in \mathrm{Ker}\left(f^{2p}\right)$, donc $a \in \mathrm{Ker}\,(f^p)$. Donc $f^p(a) = 0$. Or $f^p(a) = x$, donc $x = 0$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension n finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f)$.
   (a) Montrer que n est pair et exprimer $\mathrm{rg}\,(f)$ en fonction de n.

   > **Solution:** On a $\dim \mathrm{Ker}\,(f) + \dim \mathrm{Im}\,(f) = n$. Or $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f)$, donc $\dim \mathrm{Ker}\,(f) = \dim \mathrm{Im}\,(f)$. Donc n est pair et $\mathrm{rg}\,(f) = \frac{n}{2}$.

   (b) Montrer que $f \circ f = 0$.

   > **Solution:** Soit $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$, or $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Donc $f(f(x)) = 0$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f = 0$ et $n = 2\mathrm{rg}\,(f)$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathrm{Ker}\,(f)$ puis $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

Solution: Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $f(f(x)) = 0$. Donc $f(x) = y \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Donc $y \in \ \mathrm{Im}\,(f) \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}\,(f)$. D'où $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathrm{Ker}\,(f)$.

D'autre part, on a $\dim \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{rg}\,(f) = n = 2\mathrm{rg}\,(f)$. Donc $\dim \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{Im}\,(f)$. Or $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathrm{Ker}\,(f)$, par égalité des dimensions $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$.