Espaces vectoriels

Marc Chevalier
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme Feret

2019-2020

Dans la suite, $\mathbb{K}$ est un corps dont les lois sont notées $+$ et $\cdot$. Cependant, on s'intéressera aux cas où $\mathbb{K}$ est soit l'ensemble $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

1 Définition

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, \bullet)$ tel que :

1. $(E, +)$ soit un groupe abélien, dont on note l'élément neutre 0_E ;
2. $\bullet$ soit une loi externe de $\mathbb{K} \times E$ dans E ;
3. pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$ on ait :
   (a) $(\lambda + \mu) \bullet u = (\lambda \bullet u) + (\mu \bullet u)$;
   (b) $\lambda \bullet (u + v) = (\lambda \bullet u) + (\lambda \bullet v)$;
   (c) $\lambda \bullet (\mu \bullet u) = (\lambda \cdot \mu) \bullet u$;
   (d) $1 \bullet u = u$.

Proposition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un élément de E. On a : $0 \bullet u = 0_E$.

Proposition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre 0_E et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. On a : $\lambda \bullet 0_E = 0_E$.

Proposition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un élément de E. On a : $(-1) \bullet u = -u$.

Proposition 4

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit u un élément de E, et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Si $\lambda \bullet u = 0_E$, alors $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.

2 Sous-espaces

Définition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble non vide $F \subseteq E$, tel que :

1. pour tout $u, v \in F$, $(u + v) \in F$;
2. pour tout $u \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda \bullet u) \in F$.

Proposition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F contient l'élément neutre 0_E de la loi $+$ définie sur E.

Proposition 6

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \bullet)$. On note $+_{|F}$ la loi interne qui associe à une paire (u, v) d'éléments dans F, l'élément $u + v$, et $\cdot_{|F}$ la loi externe qui associe à un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et à un élément $u \in F$, l'élément $\lambda \bullet u$. Alors $(F, +_{|F}, \cdot_{|F})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre 0_E.

Proposition 7

Soit $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble non vide et soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriel de $(E, +, \bullet)$ indexée par I.
Alors l'interection $\bigcap_{i \in I} E_i$ de tous les sous-espaces E_i est un sous-espace de $(E, +, \bullet)$.