Familles de vecteurs

Marc Chevalier
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme Feret

2019-2020

1 Familles libres

Définition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite libre si et seulement si pour tout ensemble fini $J \subseteq I$ et toute famille de scalaire $(\lambda_j)_{j\in J}$, on a :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E \Leftrightarrow \forall j \in J, \lambda_j = 0.$$

Définition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une famille d'éléments de E. On dit que f est liée si et seulement si elle n'est pas libre.

Remarque 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble fini. Une famille $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ d'éléments de E est libre si et seulement si pour tout toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$, on a :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \bullet u_I = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_j = 0.$$

Proposition 1

Si $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors les familles libres ne contiennent pas l'élément 0_E.

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{})$. l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta^k)_{1 \leq k \leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k-ième coordonnée qui vaut 1 est libre.

Proposition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille libre d'éléments de E indexée par I. Soit J un sous ensemble de I. Alors, la famille $(u_j)_{j \in J}$ est libre.

Proposition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i := u_{\sigma(i)}. \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Proposition 4

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i \in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}. \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Proposition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

Proposition 6

Soient m et n deux entiers positifs dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq m} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. Si pour tout i entre 1 et m, il existe une coordonnée j_i telle que pour tout indice i' entre 1 et m, la j_i-ième coordonnée de $u_{i'}$ soit égale à 0 si et seulement si $i' \neq i$, alors la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ est libre.

Algorithme 1 : Élimination de Gauss-Jordan

Data : Soient m et n deux entiers positifs dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Result : L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ est libre, ou liée.

On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = m$ alors la famille est libre.
2. si $p < m$ et s'il pour tout q entre 1 et n, $u_{p+1,q} = 0$, alors la famille est liée.
3. sinon, prendre q le plus petit entier tel que $u_{p+1,q} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_{p+1} par l'inverse de $u_{p+1,q}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{p'}$ pour $p' \neq p$ le vecteur u_{p+1} multiplié par $u_{p',q}$.
6. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
7. Retourner à l'étape 1.

2 Familles génératrices

Définition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite génératrice de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si pour tout élément $u \in E$, il existe un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille de scalaire $(\lambda_j)_{j\in J}$, tels que :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j = u.$$

Proposition 7

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}^n$ telle qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que pour tout indice $i \in I$, la coordonnée i_0 de u_i soit égale à 0. Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas génératrice.

Proposition 8

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de m éléments de $\mathbb{K}^n$. On suppose qu'il existe un indice i_0 tel que $1 \leq i_0 \leq \min(m-1, n)$, et tel que pour tout i entre 1 et i_0, la j-ième coordonnée du vecteur u_i vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, et tel que pour tout $i > i_0$ la $i_0 + 1$-ième coordonnée du vecteur u_i vaut 0. Alors la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ n'est pas génératrice.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta^k)_{1\leq k\leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k-ième coordonnée qui vaut 1 est génératrice.

Proposition 9

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit J un sous ensemble de I. Alors, si la famille $(u_j)_{j\in J}$ est génératrice de E, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice de E.

Proposition 10

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i := u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.

Proposition 11

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.

Proposition 12

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.

Algorithme 2 : Comment trouver si une famille est génératrice ?

Soient m et n deux entiers positifs dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ est génératrice, ou non.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = n$ alors la famille est génératrice.
2. si $p < n$ et si pour tout k tel que $p < k \leq m$, on a : $u_{k,p+1} = 0$ alors la famille n'est pas génératrice.
3. sinon, prendre k le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $u_{k,p+1} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_k par l'inverse de $u_{k,p+1}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{k'}$ pour $k' \neq k$ le vecteur u_k multiplié par $u_{k,p+1}$.
6. Permuter le vecteur u_{p+1} et u_k.
7. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
8. Retourner à l'étape 1.

3 Bases et dimensions

Définition 4

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle base de E toute famille d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I, tel que $(u_i)_{i\in I}$ soit une base de E. Alors pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique sous-ensemble $J \subseteq I$ et une unique famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires non nuls tel que :

$$u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j.$$

Ainsi tout vecteur admet une décomposition unique dans une base.

Exemple 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ la famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ telle que la j-ième coordonnée du i-ième vecteur soit égale à 0 si $i \neq j$ et à 1 sinon. Alors $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ est une base de $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$ (on dit que c'est la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Proposition 13

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i = u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E.

Proposition 14

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E.

Proposition 15

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base.

Théorème 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit J un ensemble fini. Soit I un sous-ensemble de J. Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille d'élément de E, tel que la famille $(u_i)_{i\in I}$ soit une famille libre et la famille $(u_j)_{j\in J}$ soit une famille génératrice de E. Alors il existe un ensemble K tel que $I \subseteq K \subseteq J$ et la famille $(u_k)_{k\in K}$ est une base de E.

Théorème 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors toutes les bases de $(E, +, \bullet)$ ont le même cardinal.

Définition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. On dit que $(E, +, \bullet)$ est de dimension finie et on appelle dimension de $(E, +, \bullet)$ le cardinal des bases de E.

Proposition 16

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille libre de n élément est une base.

Proposition 17

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille génératrice de n élément est une base.

Proposition 18

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriels de $(E, +, \bullet)$. Si E et F sont de dimensions finies et égales. Alors $E = F$.

Algorithme 3 : Comment trouver si une famille est libre ?

Soient n un entier positif dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre, ou liée.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = n$ alors la famille est une base.
2. si $p < n$ et si pour tout k tel que $p < k \leq n$, on ait $u_{k,p+1} = 0$ alors la famille n'est pas une base.
3. sinon, prendre k le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $u_{k,p+1} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_k par l'inverse de $u_{k,p+1}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{k'}$ pour $k' \neq k$ le vecteur u_k multiplié par $u_{k,p+1}$.
6. Permuter le vecteur u_{p+1} et u_k.
7. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
8. Retourner à l'étape 1.