Examen de mathématiques
Algèbre linéaire

Allons, courage et confiance !

1 Des sous-espaces vectoriels ?

Tout demande justification, évidemment.

1. Soit $T \in \mathbb{R}^*$. On rappelle qu'une fonction de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. Est-ce que l'ensemble des fonctions T-périodiques forment un sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

   Solution: Oui, clairement. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned}(\lambda f + g)(x+T) &= \lambda f(x+T) + g(x+T) \\ &= \lambda f(x) + g(x) \\ &= (\lambda f + g)(x)\end{aligned}$$

   Donc $\lambda f + g$ est T-périodique.
   Par contre l'ensemble des fonctions périodiques ne forment pas un espace vectoriel : $x \mapsto \sin(2\pi x)$ et $x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x\right)$ sont toutes deux périodiques, mais leur somme ne l'est pas ! En effet, la première est 1-périodique, alors que la seconde est $\sqrt{2}$-périodique. Si la somme est T périodique, alors T est un multiple entier de 1, donc un entier. Mais aussi un multiple entier de $\sqrt{2}$. Il faudrait alors que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Ce qui n'est pas le cas. Tada !
   J'ai passé dans le tas un petit résultat des sous-groupes additifs de $(\mathbb{R}, +)$: ils sont soient dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Les périodes d'une fonction forment un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, et il ne peut pas être dense sans que la fonction soit constante (si elle est continue).

2. Est-ce que $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Solution: Oui ! $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqslant 0\right\} = \{0\}$. C'est un sous-espace vectoriel.

3. Est-ce que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y=0 \vee x+z=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Solution: Non ! Une disjonction de conditions, ça pue. Mais plus en détail, si on prend $(1,-1,0)$ et $(1,0,-1)$, les deux sont dans la partie. La somme est $(2,-1,-1)$, ce qui n'est pas dans la partie.

4. L'ensemble des suites qui divergent est-il un sous espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeur réelles ?

Solution: Non. La suite nulle ne diverge pas, donc c'est foutu : un sous-espace vectoriel contient toujours 0.

5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des suites à valeurs réelles $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall i \in \mathbb{N}, au_i + bu_{i+1} = u_{i+2}$ est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs réelles ?

Solution: Oui !
Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux telles suites et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a(\lambda u_i + v_i) + b(\lambda u_{i+1} + v_{i+1}) - (\lambda u_{i+2} + v_{i+2}) &= \lambda\left(au_i + bu_{i+1} - u_{i+2}\right) + av_i + bv_{i+1} - v_{i+2} \\ &= \lambda 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda u + v$ vérifie aussi la relation linéaire. Gagné.