

Problèmes d'algèbre linéaire

Exercice 1 : Espaces et sous espaces vectoriels et morphismes

1. Montrer que l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de l'addition et la multiplication par un réel, est un espace vectoriel. On le notera E .

Solution: Soit $(f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- $+$ est commutative et associative.
- $x \mapsto 0$ est neutre pour $+$.
- $-f$ est le symétrique de f pour $+$.
- $f + g$ est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- λf est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$.
- $1f = f$.
- $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$.
- $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$.

$(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2. Montrer que l'ensemble des fonctions paires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de E . On le notera P .

Solution: Il s'agit des fonctions qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.

C'est à dire $x \mapsto f(x) - f(-x)$ est nulle.

Montrons que $s : f \mapsto (x \mapsto f(-x))$ est un endomorphisme. On a bien $s(f + g) = s(f) + s(g)$ et $s(\lambda f) = \lambda f(s)$.

$x \mapsto f(x) - f(-x)$ est donc un morphisme et P est son noyau. P est donc un sous-espace vectoriel de E .

3. Montrer que l'ensemble des fonctions impaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de E . On le notera I .

Solution: I est le noyau de $x \mapsto f(x) + f(-x)$.

4. Soit $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telle que $a + b = f(x)$ et $a - b = f(-x)$. En déduire qu'il existe une unique paire $(p, i) \in P \times I$ telle que $p + i = f$. On dit que P et I sont supplémentaires.

Solution: On trouve $a = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $b = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Cette solution existe et est unique.

Si on pose $p : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. $p \in P$, $i \in I$ et $i + p = f$. i et p sont donc uniques.

5. On note π_P (resp. π_I) la fonction qui à f associe p (resp. i) tel que défini ci-dessus. Montrer que π_P et π_I sont linéaires. Trouver leurs noyaux et images.

Solution: $f \mapsto (x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2})$ et $f \mapsto (x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2})$ sont manifestement linéaires.

6. Déterminer $\pi_P \circ \pi_P$, $\pi_I \circ \pi_I$, $\pi_I \circ \pi_P$ et $\pi_P \circ \pi_I$.

Solution: Soit $p \in P$ et $i \in I$. $p \in E$. La fonction nulle est impaire. p se décompose donc en p et 0. Cette décomposition étant unique. $\pi_P(p) = p$. Donc $\pi_P \circ \pi_P = \pi_P$. De même $\pi_I \circ \pi_I = \pi_I$. On dit que π_I et π_P sont des projecteurs.

On trouve aussi que $\pi_I(p) = 0$. Donc $\pi_I \circ \pi_P = 0$, et de même $\pi_P \circ \pi_I = 0$. On dit que ce sont des projecteurs associés.

Exercice 2 : Familles de vecteurs

1. Soit P et Q des polynômes à coefficients complexes (en toute généralité). Montrer que si $\deg(P + Q) < \max(\deg P, \deg Q)$, alors $\deg P = \deg Q$. Montrer aussi que si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Solution: Les deux propositions sont contraposées, donc équivalentes. On va prouver la seconde. On note p le degré de P et q le degré de Q . Quitte à échanger P et Q , on suppose que $p > q$. On peut écrire

$$P = a_p X^p + \tilde{P}$$

avec $a_p \neq 0$ et $\deg \tilde{P} \leq p - 1$. Or, $q \leq p - 1$. Donc $P + Q$ est $a_p X^p + \tilde{P} + Q$ et $\deg(\tilde{P} + Q) \leq p - 1$. Donc $P + Q$ est de degré p , ce qui est bien $\max(p, q)$.

On choisit $n \in \mathbb{N}$. On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .

2. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ et sa base canonique.

Solution: Dimension = $n + 1$ et la base canonique est $1, X, X^2, X^3, \dots, X^n$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On appelle famille de polynômes échelonnée en degré une famille $(P_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ telle que $\forall i \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket, \deg P_i < \deg P_{i+1}$.

3. Soit $(P_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ et une famille échelonnée de polynômes et $(a_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ une famille de réels. En supposant $a_k \neq 0$, quel est le degré et le coefficient dominant de $S = \sum_{i=0}^k a_i P_i$. En déduire que $S \neq 0$.

Solution: Le degré de P_k est strictement plus grand le degré de tous les autres polynômes de la famille. Donc S est de degré $\deg P_k$. Et si on note c le coefficient dominant de P_k , le coefficient dominant de Q est $a_k c$.
Or a_k et c sont non nuls, donc S est non nul.

4. En déduire que la famille $(P_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ est libre.

Solution: Pour savoir si P_i est libre, supposons que $S = 0$, il vient par contraposé que $a_k = 0$. On en est réduit à montrer la liberté de $(P_i)_{i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket}$, puisque $S = \sum_{i=0}^{k-1} a_i P_i$. Par une récurrence évidente, $S = 0$ si et seulement si, $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, a_i = 0$. Donc la famille $(P_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ est libre.

5. On prend $(P_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille échelonnée de $n + 1$ polynômes. Montrer que $(P_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution: Famille libre de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$.
C'est une base.

On définit la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par

$$\begin{aligned}T_0 &= 1 \\T_1 &= X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} &= 2XT_{n+1} - T_n\end{aligned}$$

6. Pour tout n naturel, quel est le degré de T_n ?

Solution: On prouve par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n$. Le prédicat est trivialement vrai aux rangs 0 et 1. L'hérédité est correcte car T_{n+1} est de degré $n + 1$, donc $2XT_{n+1}$ est de degré $n + 2$. Alors que $-T_n$ qu'est que de degré n . Donc la somme est de degré $n + 2$.

7. Montrer que pour tout entier naturel n , la famille $(T_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution: C'est une famille échelonnée de $n + 1$ vecteurs.