Test d'algèbre linéaire

1 Sans calcul

Toute cette section peut se faire sans calcul, ou très très succinct, le genre de calcul qu'on n'écrit même pas.

1. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Est-ce que la famille composée des 2 vecteurs

$$(1, 1, 7)$$
$$(\pi, \pi^2, \pi^3)$$

est génératrice ?

> **Solution:** Non. $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et la famille comporte 2 vecteurs. Elle n'est donc pas génératrice.

2. Toujours dans $\mathbb{R}^3$, justifier que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = 0 \wedge 7y - 5z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

> **Solution:** F est le noyau de l'application linéaire $(x, y, z) \mapsto (x, 7y - 5z)$. Or un noyau est toujours un sous espace vectoriel.

3. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

> **Solution:** La matrice contient une colonne nulle. La famille des vecteurs est donc liée.

2 Du calcul

N'oubliez pas de justifier un minimum le résultat soit en détaillant le calcul, soit en évoquant la méthode utilisée, soit en vérifiant le résultat *a posteriori* (si applicable). Les intermédiaires de calculs ne sont pas strictement nécessaires, mais conseillés. Surtout si le résultat est incorrect.

1. Trouver l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution: On résout

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 = y_2 \end{cases}$$

On a donc immédiatement $3x_2 = 2y_1 - y_2$ et $-3x_1 = y_1 - 2y_2$. Donc l'inverse est

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. (a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A = D + N$.

Solution: Immédiat, non ?

(b) Vérifier que $DN = ND$.

Solution: Il faut calculer...

$$DN = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Calculer N^2 et N^3, puis déduire la valeur de N^k avec $k \geqslant 2$

Solution: On a

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut directement déduire que $\forall n \geqslant 2, N^2 = 0$.

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer D^k.

Solution: On a

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

(e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer A^k

Solution: On a $A^k = (D+N)^k = \sum_{n=0}^{k} D^{n-k} N^k$. Or, pour $k \geqslant 2$, $N^k = 0$. Donc $A^k = D^n N^0 + D^{n-1} N = 3^n I_3 + 3^{n-1} N = 3^{n-1}(3I3 + N) = 3^{n-1} A$.