DM de logique, théorie des ensembles et fonction

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

À rendre en groupe de 2 à 3.

Ne vous retenez pas de le faire en LaTeX si vous le sentez. Vous gagnerez le bonus de l'indulgence du correcteur.

Exercice 1 : Logique propositionnelle

Dans un premier temps, on va supposer qu'on peut tout écrire toute formule logique uniquement avec $\vee$, $\wedge$ et $\neg$. On dit que le système $\{\vee, \wedge, \neg\}$ est complet.

On note $(A \uparrow B) := \big(\neg(A \wedge B)\big)$. On appelle ce connecteur la barre de SHEFFER ou nand. On va s'efforcer de montrer que ce connecteur est complet. C'est à dire que toute fonction logique peut s'écrire uniquement avec le connecteur $\uparrow$.

1. Montrer que
$$(A \uparrow A) \equiv (\neg A)$$

Solution:

$[P]_\sigma$	$\big[(P \uparrow P)\big]_\sigma$	$\big[(\neg P)\big]_\sigma$
ff	*tt*	*tt*
tt	*ff*	*ff*

Les colonnes de $\big[(P \uparrow P)\big]_\sigma$ et $\big[(\neg P)\big]_\sigma$ sont les mêmes. Par conséquent, $(A \uparrow A) \equiv \neg A$.

2. Montrer que

$$\big((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)\big) \equiv (A \wedge B)$$

Solution:

$[a]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$\big[(A \uparrow B)\big]_\sigma$	$\Big[\big((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)\big)\Big]_\sigma$	$\big[(A \wedge B)\big]_\sigma$
ff	ff	tt	ff	ff
ff	tt	tt	ff	ff
tt	ff	tt	ff	ff
tt	tt	ff	tt	tt

Les colonnes de $\Big[\big((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)\big)\Big]_\sigma$ et $\big[(A \wedge B)\big]_\sigma$ sont les mêmes. Par conséquent, $\big((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)\big) \equiv (A \wedge B)$.

3. Trouver une formule n'utilisant que $\uparrow$ et les variables A et B qui soit sémantiquement équivalente à $(A \vee B)$.

Solution: On a $(A \vee B) \equiv \big((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)\big)$

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$\big[(A \uparrow A)\big]_\sigma$	$\big[(B \uparrow B)\big]_\sigma$	$\Big[\big((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)\big)\Big]_\sigma$
ff	ff	tt	tt	ff
ff	tt	tt	ff	tt
tt	ff	ff	tt	tt
tt	tt	ff	ff	tt

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$\big[(A \vee B)\big]_\sigma$
ff	ff	ff
ff	tt	tt
tt	ff	tt
tt	tt	tt

4. Écrire $\big(A \wedge (B \vee C)\big)$ uniquement avec $\uparrow$.

> **Solution:** On a
>
> $$\begin{aligned}(A \wedge (B \vee C)) &\equiv \Big(A \wedge ((B \uparrow B) \uparrow (C \uparrow C))\Big) \\ &\equiv \bigg(\Big(A \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow (C \uparrow C))\Big) \uparrow \Big(A \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow (C \uparrow C))\Big)\bigg)\end{aligned}$$

5. Conclure sur la complétude de $\{\uparrow\}$.

> **Solution:** On peut réécrire tous les connecteurs avec $\uparrow$. On peut donc transformer toute formule qui s'écrit avec $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ uniquement avec $\uparrow$.

6. On définit $(A \downarrow B) := \big(\neg(A \vee B)\big)$. On veut montrer que $\{\downarrow\}$ est complet. Écrire tous les connecteurs d'un système complet uniquement avec $\downarrow$.

> **Solution:** On choisit le système complet le plus petit : $\{\uparrow\}$. « Si, une fois fait, c'était fini, il serait bon que ce fût vite fait. » [Macbeth, I, 7, SHAKESPEARE].
>
> On a $(A \uparrow B) \equiv \Big(((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))\Big)$. On note $AA = (A \downarrow A)$ et $BB = (B \downarrow B)$.

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[(A \downarrow A)]_\sigma$	$[(B \downarrow B)]_\sigma$	$[(AA \downarrow BB)]_\sigma$
ff	ff	tt	tt	ff
ff	tt	tt	ff	ff
tt	ff	ff	tt	ff
tt	tt	ff	ff	tt

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$\Big[((AA \downarrow BB) \downarrow (AA \downarrow BB))\Big]_\sigma$	$[(A \uparrow B)]_\sigma$
ff	ff	tt	tt
ff	tt	tt	tt
tt	ff	tt	tt
tt	tt	ff	ff

Exercice 2 : Récurrence facile

On note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f. C'est à dire

$$f^{(0)} = f$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = {f^{(n)}}'$$

On note aussi $n!$ la factorielle de n, soit

$$0! = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

1. On prend $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$. Prouvez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f^{(n)}$ est défini sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Solution: On note $P(n) : f^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

- $n = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On a $f^{(0)}(x) = \frac{1}{x} = (-1)^0 \frac{0!}{x^1}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$. Prouvons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= {f^{(n)}}' \\ &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}' \\ &= (-1)^n \frac{n!(-1)(n+1)}{x^{n+2}} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Exercice 3 : Récurrence mixte

On va maintenant étudier une variante de la récurrence qui peut être utile avec les matrices (cf. second semestre). On veut montrer que

$$P(1) \land (\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) \Rightarrow P(n)) \land (\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(2n)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n))$$

En d'autres termes, on veut montrer que si on sait que P est vrai à des rangs arbitrairement grands, et que la récurrence descendante est vraie, alors le prédicat est vrai partout. Pour obtenir que P est vrai à des rangs arbitrairement grands, on suppose qu'il est vrai au rang 1 et on s'autorise des grands pas, en doublant le rang valide. Ainsi on obtient que P est vrai aux rangs 2, 4, 8, ...

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(N)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) \Rightarrow P(n))$. Montrer que $\forall n \in [\![1, N]\!], P(n)$. En d'autres termes

$$P(N) \land (\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow (\forall n \in [\![1, N]\!], P(n))$$

Solution: Soit C l'ensemble des contrexemples à P dans $[\![1, N]\!]$, ie. $C := \left\{n \in [\![1, N]\!] \,\middle|\, \neg P(n)\right\}$.
On distingue deux cas.
- C est vide. Alors $\forall n \in [\![1, N]\!], P(n)$.
- C est non vide. Il existe alors un plus grand élément, noté M. On sait que $M \in [\![1, N]\!]$. On distingue deux cas.
  - $M = N$. Impossible car $P(N)$.
  - $M < N$. On a donc $P(M+1)$ mais $\neg P(M)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) \Rightarrow P(n)$, donc $P(M+1) \Rightarrow P(M)$. Impossible.

Donc $\forall n \in [\![1, N]\!], P(n)$.

2. On suppose $P(1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(2n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(2^n)$. C'est à dire

$$P(1) \land (\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \land P(2n)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, P(2^n))$$

On pourra s'intéresser au prédicat $Q(n) :\Leftrightarrow P(2^n)$

Solution: Montrons Q sur $\mathbb{N}$.
- Pour $n = 0$, $Q(0) \Leftrightarrow P(1)$. Vrai par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $Q(n)$. On a donc $P(2^n)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(2n)$. Donc $P(2 \cdot 2^n)$, soit $P(2^{n+1})$ ou $Q(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(2^n)$.

3. Conclure. Montrer que

$$P(1) \land (\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) \Rightarrow P(n)) \land (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(2n)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n))$$

Solution: Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k \geqslant N$ (on peut prendre $k = N$ puisque $2^N > N$). Comme on a $P(1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(2n)$, on a nécessairement $P(2^k)$.

D'autre part, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) \Rightarrow P(n)$, on a $\forall n \in \left[\!\left[1, 2^k\right]\!\right], P(n)$.

Et comme $N \in \left[\!\left[1, 2^k\right]\!\right]$, on a en particulier $P(N)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$.

Exercice 4 : Équation fonctionnelle

1. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leqslant n$$
$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Il pourrait être utile et agréable de tenter de trouver les $f(0)$ possibles, puis $f(1)$, $f(2)$, ... Un schéma devrait se dégager.

Solution: Il n'y a que $f : n \in \mathbb{N} \mapsto n$. Soit $P(n) : f(n) = n$. On procède par récurrence forte sur $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\forall k \in [\![0, n]\!], P(n)$. On veut prouver $P(n+1)$. $f(n+1) \leqslant n+1$. Soit $a \in [\![0, n+1]\!]$. On distingue deux cas.

— $a = n+1$. OK.

— $a < n+1$. On a $f(a) = a$. ce qui contredit la seconde hypothèse. Impossible.

Donc $f(n+1) = n+1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.

Exercice 5 : Théorie des ensembles

Soit E un ensemble. À tut couple (A, B) de parties de E, on associe l'application $f_{A,B}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned} f_{A,B} : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto (X \cap A) \cup B \end{aligned}$$

1. Décrire les applications $f_{\emptyset,\emptyset}$, $f_{\emptyset,E}$, $f_{E,\emptyset}$, $f_{E,E}$.

Solution: L'application $f_{\emptyset,\emptyset}$ est constante et associe $\emptyset$ à tout élément de $\mathcal{P}(E)$.
Les applications $f_{E,\emptyset}$ est l'identité $\mathcal{P}(E)$.
$f_{\emptyset,E}$, $f_{E,E}$ sont égales et sont l'application constantes qui associent E à tout élément de de $\mathcal{P}(E)$.

2. Soient A et B deux parties de E.
   (a) Déterminer les images par $f_{A,B}$ de E, de $\emptyset$, de A et de B.

   Solution:
   $$f_{A,B}(E) = f_{A,B}(A) = A \cup B$$
   $$f_{A,B}(\emptyset) = f_{A,B}(B) = B$$

   (b) Montrer que l'on a $\forall X \in \mathcal{P}(E), B \subseteq f_{A,B}(X) \subseteq A \cup B$.

   Solution: Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. $f_{A,B}(X) = (X \cap A) \cup B \supseteq B$.
   De plus $(X \cap A) \subseteq A$. D'où le résultat

Exercice 6 : Plus d'ensembles

1. Soit E un ensemble. Montrer la propriété

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), X = Y \Leftrightarrow X \cap Y = X \cup Y$$

Solution: On procède par double implication

– (⇒) On suppose que $X = Y$. Le résultat est immédiat.
– (⇐) On suppose $X \cap Y = X \cup Y$. Pour montrer que $X = Y$. On va prendre un élément $x \in X \setminus Y$. On a donc $x \notin X \cap Y$. Mais puisque $x \in X$, $x \in X \cup Y$. Contradiction, donc $X \setminus Y$ est vide. Ie. $X \subseteq Y$. Par symétrie, on peut montrer que $Y \subseteq X$. D'où $X = Y$.

2. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Les égalités suivantes sont-elle vraies ?

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$
$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

Solution:

— Non. En effet, si $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. $A \cup B = \{1, 2\}$. Donc $\{1, 2\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Mais $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.

— Procédons par double inclusion.

–(⊆) Soit $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. On a donc $X \subseteq A \cap B$. Donc $X \subseteq A$ et $X \subseteq B$. Donc $X \in \mathcal{P}(A)$ et $X \in \mathcal{P}(B)$. Donc $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

–(⊇) Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) \quad \Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B) \end{aligned}$$