# TD Théorie des ensembles

inspiré de Jérôme Feret

**Exercice 1:**

Soit $A$ et $B$ deux ensembles.

(a) Quels sont les ensembles $X$ tels que $A \cup X = B \cap X$ ?

**Solution:** On a une double inclusion : $A \cup X \subseteq B \cap X$ et $A \cup X \supseteq B \cap X$.

En utilisant la première tout élément de $A$ et de $X$ doit être dans $B$ et $X$ (par conséquent, il n'y a pas de solution si $A \not\subseteq B$). C'est à dire $X \subseteq B$. On trouve aussi que $A \subseteq X$. La dernière inclusion $X \subseteq X$ ne nous apprend rien.

L'autre inclusion ne nous apprend rien : il faut que les éléments qui sont dans $B$ et $X$ soient dans $A$ ou $X$. Ceci est toujours vrai car tous les éléments de $X$ sont dans $X$.

On trouve qu'une condition nécessaire est $A \subseteq X \subseteq B$.

Montrons que cette condition est suffisante. On suppose $A \subseteq B$ (sinon, on sait qu'il n'y a pas de solution). Et on prend $A \subseteq X \subseteq B$. On montre les deux inclusions.

- ($\subseteq$) $A \subseteq X$ et $X \subseteq B$. Donc $A \cup X \subseteq B$ et $A \cup X \subseteq X$. Donc $A \cup X \subseteq B \cap X$.
- ($\supseteq$) On a $A \cup X \supseteq X \supseteq B \cap X$. Donc cette inclusion est toujours vraie.

Une condition nécessaire et suffisante sur $X$ est $A \subseteq X \subseteq B$.

(b) Quels sont les ensembles $X$ tels que $A \cup X = B \setminus X$ ?

**Solution:** On doit en particulier alors $A \cup X \subseteq B \setminus X$. Donc si $X$ a un élément $a$, on a $a \in X$ donc $a \in A \cup X$, mais $a \notin B \setminus X$. Ainsi, le seul ensemble candidat est $\emptyset$. L'équation se réduit alors en $A = B$. Ce qui donne une condition triviale sur l'existence d'une solution : si $A = B$, alors $X = \emptyset$ ; sinon, il n'y a pas de solution.

**Exercice 2:**

Soit $A$, $B$, et $C$ trois ensembles. Soit $f$ une fonction entre l'ensemble $A$ et l'ensemble $B$, et $g$ une fonction entre l'ensemble $B$ et l'ensemble $C$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

(a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.

**Solution:** Soit $z \in C$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in A$ tel que $g \circ f(x) = z$. Si on note $y = f(x)$, on a donc $y \in B$ tel que $g(y) = z$. Donc on a un antécédent à $z$. Donc $g$ est surjective.

(b) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.

**Solution:** On utilise la contraposée. On suppose $f$ non injective. Il existe $(x, x') \in A^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On a alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Donc $g \circ f$ n'est pas injective.

**Exercice 3:**

Supposons que $H$ l'ensemble de tous les ensembles existe. Nous définissons l'ensemble $F$ suivant :

$$F := \{E \in H \mid E \notin E\}$$

(a) Montrer que $F \in F \Rightarrow F \notin F$.

**Solution:** On suppose que $F \in F$. On a alors $F \notin F$ par définition de $F$.

(b) Montrer que $F \notin F \Rightarrow F \in F$.

**Solution:** On suppose $F \notin F$. On a alors $F \in F$ car dans le cas contraire, on devrait alors $F \in F$, ce qui contredit l'hypothèse.

(c) Qu'en concluez-vous ?

**Solution:** L'hypothèse de départ ($H$ existe) ne peut pas être vraie. Il n'y a donc pas d'ensemble de tous les ensembles. C'est le paradoxe de RUSSELL.

**Exercice 4:**

L'hôtel de Hilbert est un peu particulier. Il possède une infinité de chambres numérotées de 1 à l'infini. Chaque chambre peut accueillir une seule famille. L'hôtelier est efficace et accommodant, en cas de besoin, il peut déplacer simultanément les occupants des chambres vers d'autres chambres (bien entendu sans jamais mettre deux familles dans la même chambre), et ce quelque soit la distance entre les chambres et le nombre de familles à déplacer.

(a) L'hôtel est plein et une nouvelle famille arrive. Pourtant l'hôtelier parvient à la loger dans une chambre, comment fait il ?

**Solution:** Il suffit de loger chaque famille dans la chambre suivante ($i \to i+1$), la chambre 0 est alors libre, et tout le monde a une chambre.

(b) L'hôtel est plein et un bus contenant une infinité de familles numérotés de 1 à l'infini arrive. L'hôtelier loge tout le monde, comment fait il ?

**Solution:** Il suffit de loger chaque famille dans la chambre portant le double du numéro de leur chambre actuelle ($i \to 2i$). Ainsi, toutes les chambres de numéro impair sont libres, on peut loger tout le monde.

(c) L'hôtel est vide, mais une infinité de bus numérotés de 1 à l'infini arrive avec chacun un ensemble infini de familles numérotées de 1 à l'infini. Pas de soucis pour l'hôtelier, comment fait il ?

**Solution:** Il suffit de bouger chaque famille de la chambre $i$ à la chambre $2i+1$. Les chambres de numéro pair sont alors libres. Maintenant, le passager numéro $m$ du bus numéro $n$ se verra attribuer la chambre $2^{m+1}(2n+1)$. C'est toujours des nombres pairs, et on peut se convaincre que deux familles n'arriveront jamais dans la même chambre car un nombre se décompose d'une unique façon en un produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair.

(d) Un nombre infini de bus arrive. Chaque bus a un nombre infini de passagers numérotés de 1 à l'infini. Chaque passager a un bulletin blanc ou noir. Toutes les combinaisons (le premier passager a un bulletin blanc, tous les autres ont un noir ; le deuxième passager a un bulletin blanc, tous les autres ont un boit ; seuls les deux premiers passagers a un bulletin blanc, ...) sont représentées dans un bus. Par chance, seuls les chauffeurs de bus ont besoin d'une chambre. Cependant, malgré la meilleure volonté de l'hôtelier, il n'arrive pas à trouver une solution, pourquoi ?

**Solution:** Cette question est très largement hors programme. L'idée, c'est de montrer qu'il y a autant de bus que d'éléments dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et que cet ensemble est beaucoup plus grand que $\mathbb{N}$. La première partie est assez directe : les bulletins (blancs ou noir) indique la partie de $\mathbb{N}$ considérée. La seconde est plus complexe, c'est le théorème de Cantor.

**Exercice 5:**

Soit $E$ un ensemble et $P(x \in E)$ un prédicat portant sur un élément $x \in E$ de l'ensemble $E$. Parmi les assertions suivantes, laquelle/lesquelles est/sont toujours vraie/vraies :

(a) $[\forall x \in E, (P(x) \wedge P(x))] \Rightarrow [\forall x \in E, (P(x) \vee P(x))]$

**Solution:** On suppose $\forall x \in E, (P(x) \wedge P(x))$. On veut montrer $\forall x \in E, (P(x) \vee P(x))$. Soit $x \in E$. On a $P(x) \wedge P(x)$. Donc $P(x)$. Donc $P(x) \vee P(x)$. Donc la proposition est correcte.

(b) $[\exists x \in E : P(x)] \Rightarrow [\exists x \in E : P(x) \wedge P(x)]$.

**Solution:** On suppose que $\exists x \in E : P(x)$. Soit $y$ tel que $P(y)$. On a alors $P(y) \wedge P(y)$. Ce $y$ est donc un témoin de $\exists x \in E : P(y) \wedge P(y)$. La proposition est vraie.

**Exercice 6:**

Montrer que le somme des carrés des entiers entre 0 et $n$ est égale à

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Solution:** On appelle $P$ le prédicat sur $\mathbb{N}$ : « $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ». On prouve $P$ par récurrence sur $\mathbb{N}$.

— Pour $n = 0$, on a $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0$. Donc $P(0)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &\Leftrightarrow (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(6(n+1) + n(2n+1))}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.