

TD3 : Fonctions

Exercice 1:

(a) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto -n \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

v.

$$\begin{aligned} f_5 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

(b) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n + 1 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n + 1 \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

Exercice 2:

Soit f et g des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer si f , g , $f \circ g$ et $g \circ f$ sont injectives, surjectives ou bijectives.

Exercice 3:

Démontrer que la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$$

$$x \mapsto \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque. On pourra utiliser le changement de variable $X = e^x$.

Exercice 4:

(a) Soit f

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{P}$$

$$n \mapsto 2n$$

où \mathfrak{P} est l'ensemble des entiers naturels pairs. Soit g

$$g : \mathbb{Z}^{-*} \rightarrow \mathfrak{I}$$

$$n \mapsto -2n - 1$$

où \mathfrak{I} est l'ensemble des entiers naturels impairs. Prouver que f et g sont des bijections.

(b) On pose h

$$h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} f(n) & \text{si } n \geq 0 \\ g(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que h est une bijection.

Exercice 5:

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto e^{it}$$

Trouver des sous ensembles de \mathbb{R} et \mathbb{C} tel que f est une bijection.

Exercice 6:

Soit

$$f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

Déterminer si f est injective, surjective, bijective...

Exercice 7: Des curiosités plus difficiles

- (a) Trouver une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N} .
- (b) Trouver une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et \mathbb{R} .