

## TD3 : Fonctions

**Exercice 1:**

(a) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

**Solution:**

- Injectivité : Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . On suppose  $f_1(x) = f_1(y)$ . On a donc  $2x = 2y$ . Donc  $x = y$ . Donc  $f_1$  est injective.
- Surjectivité : On constate que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f_1(n)$  est pair. Donc l'équation  $f_1(n) = 1$  n'a pas de solution. Donc  $f_1$  n'est pas surjective.
- Bijectivité : Comme  $f_1$  n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

ii.

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto -n \end{aligned}$$

**Solution:**

- Injectivité : Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . On suppose  $f_2(x) = f_2(y)$ . On a donc  $-x = -y$ . Donc  $x = y$ . Donc  $f_2$  est injective.
- Surjectivité : Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . On cherche à résoudre  $f_2(m) = n$  en  $m$ . C'est à dire  $-m = n$ . Donc  $m = -n$ . La solution existe. Donc la fonction est surjective.
- Bijectivité :  $f_2$  est surjective et injective, donc bijective. D'autre part, on aurait pu se contenter de remarquer  $f_2(m) = n$  n'a qu'une solution en  $m$ .

iii.

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

**Solution:**

- Injectivité :  $f_3(-1) = 1 = f_3(1)$  donc  $f_3$  n'est pas injective.
- Surjectivité : L'équation  $f_3(x) = -1$  n'a pas de solution. Donc  $f_3$  n'est pas surjective.
- Bijectivité :  $f_3$  n'est ni injective, ni surjective, donc sûrement pas bijective.

iv.

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

**Solution:**

- Injectivité : cf. supra.
- Surjectivité : Tous les éléments de  $\mathbb{R}^+$  sont atteints. Plus formellement, soit  $y \in \mathbb{R}^+$ . On cherche la solution en  $x$  de  $f_4(x) = y$ . Une solution (non unique) est  $x = \sqrt{y}$  (qui existe forcément). Donc  $f_4$  est surjective.
- Bijektivité : La fonction n'est pas injective donc pas bijective.

v.

$$f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto x^2$$

**Solution:**

- Injectivité : Même chose que précédemment.
- Surjectivité : Soit  $y \in \mathbb{C}$ .  $y$  peut s'écrire sous sa forme exponentielle :  $y = \rho e^{i\theta}$ . On pose  $x = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ . On a  $f_5(x) = y$ . Donc pour tout  $y \in \mathbb{C}$ , l'équation  $f_5(x) = y$  a une solution en  $x$ , donc  $f_5$  est surjective.
- Bijektivité : La fonction n'est pas injective donc pas bijective.

(b) Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.

$$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n + 1$$

**Solution:**

- Injectivité : Soit  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ . On suppose  $f_1(x) = f_1(y)$ . On a donc  $x + 1 = y + 1$ . Donc  $x = y$ . Donc  $f_1$  est injective.
- Surjectivité :  $f_1(x) = 0$  n'a pas de solution, donc  $f_1$  n'est pas surjective.
- Bijektivité : Comme  $f_1$  n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

ii.

$$f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto n + 1$$

**Solution:**

- Injectivité : Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . On suppose  $f_2(x) = f_2(y)$ . On a donc  $x + 1 = y + 1$ . Donc  $x = y$ . Donc  $f_2$  est injective.
- Surjectivité : Soit  $y \in \mathbb{Z}$ . On cherche une solution à  $f_2(x) = y$ . Une solution est  $x = y - 1$ . Donc  $f_2$  est surjective.
- Bijektivité : Comme  $f_2$  est injective et surjective,  $f_2$  est bijective.

iii.

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

**Solution:**

— Injektivité : Soit  $((a, b), (c, d)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ . On suppose  $f_3((a, b)) = f_3((c, d))$ .  
Autrement dit  $(a+b, a-b) = (c+d, c-d)$ , donc  $a+b = c+d$  et  $a-b = c-d$ .  
On résout le système

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a - b = c - d \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ 2a = 2c \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} b = d \\ a = c \end{cases}$$

Donc  $(a, b) = (c, d)$ , donc  $f_3$  est injective.

— Surjectivité : Soit  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ . On cherche à résoudre  $f_3((a, b)) = (c, d)$  en  $(a, b)$ .

$$\begin{cases} a + b = c \\ a - b = d \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a + b = c \\ 2a = c + d \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d \\ a = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d \end{cases}$$

Donc il existe une solution, donc  $f_3$  est surjective

— Bijektivité :  $f_3$  est injective et surjective, donc bijective.

**Exercice 2:**

Soit  $f$  et  $g$  des applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définies par

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer si  $f$ ,  $g$ ,  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont injectives, surjectives ou bijectives.

**Solution:**

- $f$  est évidemment injective.  $f$  n'atteint jamais 1, donc  $f$  n'est pas bijective.
- $g$  n'est pas injective car  $g(1) = 0 = g(3)$ .  $g$  est surjective car tout  $y \in \mathbb{N}$  est atteint, en effet  $g(2y) = y$ .  $g$  n'est pas bijective.
- Soit  $x \in \mathbb{N}$ .  $g \circ f(x) = g(2x)$ . Or  $2x$  est toujours pair, donc  $g(2x) = x$ . Donc  $g \circ f = Id$ . Donc  $g \circ f$  est bijective.
- On a  $f \circ g(0) = 0 = f \circ g(1)$  donc  $f \circ g$  n'est pas injective. On a également  $f \circ g(x) = 2g(x)$ . Donc  $f \circ g(x)$  est toujours pair, donc  $f \circ g$  n'est pas surjective. Donc  $f \circ g$  n'est pas bijective.

**Exercice 3:**

Démontrer que la fonction  $f$  définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$$

$$x \mapsto \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque. On pourra utiliser le changement de variable  $X = e^x$ .

**Solution:** Soit  $y \in \mathbb{R}^{+*}$ . On veut résoudre  $f(x) = y$  en  $x$ . On veut donc résoudre  $\frac{e^x + 2}{e^{-x}} = y$ . En utilisant le changement de variable suggéré :  $\frac{X+2}{X} = y$ .

$$\begin{aligned} \frac{X+2}{X} = y &\Leftrightarrow X(X+2) = y \\ &\Leftrightarrow X^2 + 2X = y \\ &\Leftrightarrow X^2 + 2X - y = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-y) = 4(1+y)$ . Les racines sont donc

$$X = -1 \pm \sqrt{1+y}$$

Mais  $X = e^x$ . Donc  $X > 0$ . Donc  $e^x = X = -1 + \sqrt{1+y}$ . On en déduit  $x = \ln(-1 + \sqrt{1+y})$ . Il existe donc au plus une solution. Il faut encore vérifier que  $\ln(-1 + \sqrt{1+y})$  est bien défini. On a  $y > 0$ , donc  $\sqrt{1+y} > 1$ , donc  $-1 + \sqrt{1+y} > 0$ , donc la solution est toujours bien définie. Donc la fonction est bijective, de réciproque :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \ln(-1 + \sqrt{1+y})$$

**Exercice 4:**

(a) Soit  $f$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{P}$$

$$n \mapsto 2n$$

où  $\mathfrak{P}$  est l'ensemble des entiers naturels pairs. Soit  $g$

$$g : \mathbb{Z}^{-*} \rightarrow \mathfrak{I}$$

$$n \mapsto -2n - 1$$

où  $\mathfrak{I}$  est l'ensemble des entiers naturels impairs. Prouver que  $f$  et  $g$  sont des bijections.

**Solution:**

- Soit  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ . On suppose  $f(x) = f(y)$  donc  $2x = 2y$  donc  $x = y$ , donc  $f$  est injective. D'autre part pour tout nombre pair  $n$ , il existe une solution en  $m$  à  $f(m) = n : \frac{n}{2} = m$ . Donc  $f$  est surjective, donc bijective.
- Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^{-*2}$ . On suppose  $g(x) = g(y)$  donc  $-2x + 3 = -2y + 3$  donc  $x = y$ , donc  $g$  est injective.  
Soit  $n = 2k + 1$  un nombre impair. On cherche à résoudre  $g(x) = n$  en  $x$ .  
 $-2x - 1 = 2k + 1$ ,  $-2x - 2 = 2k$ , donc  $-x - 1 = k$  donc  $x = -k - 1$ . Donc  $g$  est surjective donc bijective.

(b) On pose  $h$

$$h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} f(n) & \text{si } n \geq 0 \\ g(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $h$  est une bijection.

**Solution:**

- Injectivité : Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . On suppose  $h(x) = h(y)$ . On distingue 3 cas :
  - $x$  et  $y$  sont positifs. On a donc  $f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$ . Donc  $x = y$  par injectivité de  $f$ .
  - $x$  et  $y$  sont strictement négatifs. On a donc  $g(x) = h(x) = h(y) = g(y)$ . Donc  $x = y$  par injectivité de  $g$ .
  - $x$  et  $y$  sont de signes différents. Donc  $h(x)$  est pair et  $h(y)$  est impair ou inversement. Donc on ne peut pas avoir  $h(x) = h(y)$ . Ce cas est donc impossible.
 Dans tous ces cas,  $h$  est injective.
- Surjectivité : Soit  $y \in \mathbb{N}$ . On distingue 2 cas :
  - $y$  est pair : il existe  $x \in \mathbb{N}$  tel que  $f(x) = y$ , par surjectivité de  $f$ . Donc  $h(x) = y$  a une solution.
  - $y$  est impair : il existe  $x \in \mathbb{Z}^{-*}$  tel que  $g(x) = y$ , par surjectivité de  $g$ . Donc  $h(x) = y$  a une solution.
 Donc  $h$  est surjectif.
- Donc  $h$  est bijective.

**Exercice 5:**

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto e^{it}$$

Trouver des sous ensembles de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  tel que  $f$  est une bijection.

**Solution:** La fonction  $g$

$$g : [0; 2\pi[ \rightarrow \mathbb{U}$$

$$t \mapsto e^{it}$$

est bijective où  $\mathbb{U}$  est le cercle unité.

$g$  est injective :

$$g(x) = g(y) \Leftrightarrow e^{ix} = e^{iy}$$

$$\Leftrightarrow x = y + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = y \text{ car } t, t' \in [0, 2\pi[ \text{ et donc } k = 0$$

$g$  est surjective car tout nombre complexe de  $\mathbb{U}$  s'écrit sous la forme polaire  $e^{i\theta}$ , et l'on peut choisir  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

**Exercice 6:**

Soit

$$f : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

Déterminer si  $f$  est injective, surjective, bijective...

**Solution:**

- Soit  $(x, y) \in [1, +\infty[^2$ . On suppose  $f(x) = f(y)$ . Donc  $x^2 - 1 = y^2 - 1$  so  $x^2 = y^2$  et  $x = \pm y$ . Mais  $x, y > 1$ . Donc  $x = y$ . Donc  $f$  est injective.
- Soit  $y \in [0, +\infty[$ . On cherche à résoudre  $f(x) = y$  en  $x$  dans  $[1, +\infty[$ . On a  $x^2 - 1 = y$ ,  $x^2 = y + 1$  donc  $x = \pm\sqrt{y + 1}$ . Mais  $x > 0$ . Donc  $x = \sqrt{y + 1}$ . Donc  $f$  est surjective.
- Donc  $f$  est injective et surjective donc bijective.

**Exercice 7: Des curiosités plus difficiles**

(a) Trouver une bijection entre  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{N}$ .

**Solution:**

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(m, n) \mapsto 2^m(2n + 1) - 1$$

fait l'affaire. En effet, on peut montrer que

$$g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$$

$$(m, n) \mapsto 2^m(2n + 1)$$

est une bijection.

- Soit  $((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ . On suppose  $g((a, b)) = g((c, d))$ . On a donc  $2^a(2b + 1) = 2^c(2d + 1)$ .  $2^a$  et  $2^c$  sont pairs et  $2b + 1$  et  $2d + 1$  sont impairs. On a donc  $2^a = 2^c$  et  $2b + 1 = 2d + 1$ . Donc  $(a, b) = (c, d)$ . Donc  $g$  est injective.

— Soit  $y \in \mathbb{N}$ . Soit  $2^k$  la plus grande puissance de 2 qui divise  $y$ . Il existe donc  $l$  tel que  $y = 2^k l$  avec  $l$  impair. En effet, si  $l$  est pair, on pourrait diviser  $y$  par  $2^{k+1}$ , ce qui contredit le choix de  $k$ . Puisque  $l$  est impair, il existe  $n$  tel que  $l = 2n + 1$ . Donc  $x = (k, n)$  est une solution de  $g(x) = y$ . On en déduit que  $g$  est surjective.

—  $g$  est donc bijective.

On en déduit facilement que  $f$  est bijective également.

(b) Trouver une bijection entre  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $\mathbb{R}$ .

**Solution:** Plein d'étapes !

- Montrer que  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  est en bijection avec l'ensemble des fonctions caractéristiques de  $\mathbb{N}$
- Montrer que ces fonctions sont en bijection avec les suites infinies à valeur dans  $\{0, 1\}$ .
- Montrer que ces suites sont en bijection avec les décompositions binaires des nombres de  $[0, 1]$ . Pour ce faire, construire tout d'abord une surjection, déterminer les éléments atteints plusieurs fois (exactement 2 en fait). Faire une suite en listant les antécédents de ces valeurs et sauter un indice sur deux.
- Construire une bijection entre  $[0, 1]$  et  $]0, 1[$ . Construire une bijection entre  $]0, 1[$  et  $\mathbb{R}$ .
- Pfiou fini !