Raisonnement

Marc Chevalier
marc.chevalier@ens.fr

DI ENS

Septembre 2019

Déduction

Déduction

Proposition 1 – Modus ponens

Si φ_1 et $\left(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2\right)$ sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie.

Déduction

Exemple 1

(« Je pense » $\Rightarrow$ « je suis ») or « je pense » donc « je suis ».

Déduction

Proposition 2

Soient φ_1 et φ_2 deux formules du calcul propositionnel. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_1 sont des tautologies ;
2. $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_2 sont des tautologies.

On peut utiliser une équivalence comme des implications dans les deux sens.

Déduction

Prouver $\left(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)\right)$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Théorème 1

Les formules

$$\left((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow \left(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)\right)\right)$$

et

$$\left((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow \left(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)\right)\right)$$

sont des tautologies.

Pas très intéressant car $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ est plus précis que $\left(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)\right)$.

Prouver $\left(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)\right)$

Exemple 2

On veut prouver $\left(n \text{ premier} \Rightarrow (n > 1 \vee n = 0)\right)$. Or, tout entier premier est supérieur à 2. Donc, tout entier premier est supérieur à 2 ou nul.

Déduction

Prouver $\left(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)\right)$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Lemme 1

Les formules φ_1 et φ_2 sont des tautologies, si et seulement si la formule $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ est une tautologie.

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Théorème 2 – Prouver une conjonction

La formule $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2)) \iff (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie.

Déduction

Prouver $\left(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)\right)$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

Le raisonnement par contraposition

Théorème 3 – Contraposée

La formule $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ est une tautologie

Le raisonnement par contraposition

Exemple 3

(« Je pense » $\Rightarrow$ « Je suis ») $\Leftrightarrow$ (« Je ne suis pas » $\Rightarrow$ « Je ne pense pas »)

Le raisonnement par contraposition

Exemple 4

Nous pouvons montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, si x est plus petit que tous les réels strictement positifs, alors x est inférieur ou égal à 0.

Démonstration.

On va prouver la contraposée :
$(x > 0 \Rightarrow$ il existe un réel strictement positif plus petit que $x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose x strictement positif.
$\frac{x}{2} > 0$ et $\frac{x}{2} < x$. Donc il existe un réel strictement positif plus petit que x. $\square$

Le raisonnement par contraposition

Corollaire 1 – Modus tollens

Si $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ et $(\neg\varphi_2)$ sont des tautologies, alors $(\neg\varphi_1)$ est une tautologie.

Démonstration.

On utilise la contraposée de $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ qui est équivalent à $\big((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)\big)$ or, comme on a $(\neg\varphi_2)$, on applique le modus ponens pour déduire $(\neg\varphi_1)$. $\square$

Le raisonnement par l'absurde

Théorème 4 – Raisonnement par l'absurde

La formule $\left(\left((\neg\varphi) \Rightarrow \bot\right) \Rightarrow \varphi\right)$ est une tautologie.

En français : si $(\neg\varphi)$ mène à une contradiction, alors $(\neg\varphi)$ est faux (donc φ est vrai).

Le raisonnement par l'absurde

Exemple 5

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration.

Par l'absurde, on prouve $\varphi := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
On va prouver que $(\neg\varphi)$ (c'est à dire $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) implique une contradiction, c'est à dire $(\varphi \Rightarrow \bot)$. Or on sait que $\Big(\big((\neg\varphi) \Rightarrow \bot\big) \Rightarrow \varphi\Big)$, donc φ (modus ponens). $\square$

Preuve par cas

Théorème 5

La formule $\Big(\big(\varphi_1 \vee \varphi_2\big) \wedge \big(\varphi_1 \Rightarrow \varphi\big) \wedge \big(\varphi_2 \Rightarrow \varphi\big) \Rightarrow \varphi\Big)$ est une tautologie.

Preuve par cas

Exemple 6

Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.

Démonstration.

On veut prouver $\varphi := n \cdot (n+1)$ est pair.
Les deux cas : $\varphi_1 :=$ n est pair ; $\varphi_2 :=$ n est impair

- φ_1 On suppose n pair, donc n est divisible par 2, $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.
- φ_2 On suppose n impair, donc $n+1$ est divisible par 2, $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.

De plus, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ est vrai, donc φ est vrai. $\square$

Preuve par cas

Théorème 6

La formule $\left(\left((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2\right) \Leftrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)\right)$ est une tautologie.

Preuve par cas

Exemple 7

Soit $n \in \mathbb{R}$. On veut prouver $(n \geqslant 0 \vee n < 0)$. $\varphi_1 := n \geqslant 0$ et $\varphi_2 := n < 0$. On suppose $(\neg\varphi_1)$, c'est à dire, on suppose $(\neg n \geqslant 0)$, ie. $n < 0$. D'où φ_2.

En effet, soit φ_1 est vrai, donc $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ est vrai. Ou alors φ_1 est faux. On en déduit alors φ_2. Donc $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

Avec des quantificateurs

Axiome 1 – Généralisation ou abstraction

Si nous pouvons prouver la propriété $P(t)$ pour $t \in E$ arbitraire (ie sans utiliser de propriété spécifique de t), alors nous pouvons en déduire la propriété $\forall x \in E, P(x)$.

Avec des quantificateurs

Axiome 2 – Concrétisation

Si nous pouvons prouver une propriété $\forall x \in E, P(x)$, alors nous pouvons prouver $P(x)$ pour n'importe quel élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Avec des quantificateurs

Axiome 3 – Témoin

Si nous pouvons prouver la propriété $P(e)$ pour un élément $e \in E$ en particulier, alors nous pouvons en déduire la propriété $\exists x \in E : P(x)$.