

# Ensembles et relations

Marc CHEVALIER  
DI ENS

Septembre 2019

## Table des matières

### 1 Ensembles et éléments

#### Définition 1 – Ensemble

Un ensemble est une collection non ordonnée et sans répétition d'objets. Si  $a, b, c$  sont des éléments, nous notons  $\{a, b, c\}$  l'ensemble formé des éléments  $a, b$ , et  $c$ .

#### Définition 2 – Cardinal

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'élément qu'il contient. Le cardinal d'un ensemble est noté  $\text{card}(A)$  ou  $|A|$ .

#### Définition 3 – Appartenance

Nous notons :

$$x \in X$$

le fait qu'un objet  $x$  soit un élément de l'ensemble  $X$ .

## 2 Axiomes

### 2.1 Extensionnalité

#### Axiome 1 – Extensionnalité

Nous dirons que deux ensembles  $X$  et  $Y$  sont égaux si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites :

1. tout élément de l'ensemble  $X$  est un élément de l'ensemble  $Y$  ;
2. tout élément de l'ensemble  $Y$  est un élément de l'ensemble  $X$ .

### 2.2 Axiomes constructifs

Dans cette section, nous considérons deux ensembles  $A$  et  $B$ .

#### 2.2.1 Paire

#### Axiome 2 – Paire

Étant donné deux éléments  $a$  et  $b$ , il existe un ensemble  $\{a, b\}$ .

#### 2.2.2 Réunion

#### Notation 1 – Réunion

La réunion de  $A$  et  $B$  est notée  $A \cup B$ .

#### 2.2.3 L'ensemble des parties

#### Définition 4 – Partie

Si  $X$  est une collection d'objets tous éléments de  $A$ , nous disons que  $X$  est une partie (ou un sous-ensemble) de  $A$ , ce que nous notons  $X \subseteq A$ .

#### Proposition 1

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

#### Axiome 3 – Axiome de l'ensemble des parties

La collection de toutes les parties de l'ensemble  $A$  est un ensemble.

### Notation 2 – Ensemble des parties

L'ensemble de toutes les parties de l'ensemble  $A$  est noté  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ .

## 2.2.4 Schéma d'axiomes de compréhension

### Axiome 4 – Compréhension

Toute collection d'objets tous éléments de  $A$  est un ensemble.

### Proposition 2

Si  $A$  est un ensemble et  $P$  un prédicat portant sur les éléments de  $A$ . Alors la partie de  $A$  tel que  $P$  est vrai, est un ensemble. Nous la notons :

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

### 2.2.4.1 Intersection

#### Définition 5 – Intersection

Nous appelons intersection de  $A$  et de  $B$  la collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble  $A$  et éléments de l'ensemble  $B$ , et la notons  $A \cap B$ .

### 2.2.4.2 Différence

#### Notation 3 – Différence

Nous notons  $A \setminus B$  l'ensemble des éléments de l'ensemble  $A$  qui ne sont pas des éléments de l'ensemble  $B$ .

#### Définition 6 – Complémentaire

Soit  $E$  un ensemble et  $F$  une partie de  $E$ . On appelle le complémentaire de  $F$  dans  $E$  l'ensemble  $E \setminus F$ .

Le complémentaire de  $F$  dans  $E$  est noté  $\complement_E F$ . Si  $E$  est clair d'après le contexte, on peut simplement parler du complémentaire de  $F$  et le noter  $\complement F$ .

### 2.2.4.3 Différence symétrique

#### Proposition 3

La collection des objets qui sont élément de l'ensemble  $A$  ou élément de l'ensemble  $B$ , mais pas les deux, est un ensemble.

#### Définition 7 – Différence symétrique

Nous notons  $A\Delta B$  l'ensemble des objets qui sont des éléments de l'ensemble  $A$  ou des éléments de l'ensemble  $B$ , mais pas des deux, c'est à dire

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

#### Proposition 4

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

### 2.2.5 L'infini

#### Axiome 5

Il existe un ensemble infini.

## 3 Ensemble particuliers

### 3.1 Couple et produit cartésien

#### Définition 8

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. On appelle produit cartésien de  $A$  et  $B$  l'ensemble noté  $A \times B$  défini par

$$A \times B = \{z \mid \exists a \in A : \exists b \in B : z = (a, b)\}$$

#### Notation 4

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

**Notation 5**

$$A^2 = A \times A$$
$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

### 3.2 Ensembles numériques

**Notation 6**

$\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ .

**Notation 7**

Étant donné un ensemble numérique  $A$ , on note  $A^* := A \setminus \{0\}$ .

**Notation 8**

$\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs  $\{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ .

**Notation 9**

$\mathbb{Q}$  est l'ensemble des rationnels, c'est à dire l'ensemble des nombres qu'on peut écrire sous la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ .

**Notation 10**

$\mathbb{R}$  est l'ensemble des réels.

**Notation 11**

$\mathbb{C}$  est l'ensemble des complexes.

### 3.3 Notations usuelles

**Notation 12**

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , on note  $\llbracket a, b \rrbracket$  l'ensemble des entiers plus grands que  $a$  et plus petits que  $b$ .

**Notation 13**

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on note  $[a, b]$  l'ensemble des réels entre  $a$  et  $b$ . On appelle ces ensemble des intervalles (ou intervalles fermés).

**Proposition 5**

Si  $a \neq b$ ,  $[a, b]$  a une infinité d'éléments.

**Notation 14**

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- $]a, b] = [a, b] \setminus \{a\}$  (intervalle (semi-)ouvert à gauche)
- $[a, b[ = [a, b] \setminus \{b\}$  (intervalle (semi-)ouvert à droite)
- $]a, b[ = [a, b] \setminus \{a, b\}$  (intervalle ouvert)

**Notation 15**

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$

- $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $] - \infty, a[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $] - \infty, +\infty[ = \mathbb{R}$