Examen de mathématiques

1 Logique propositionnelle

Nous allons étudier une classe de formule logique très utiles en programmation logique et méthodes formelles : les clauses de HORN.

Étant donnée une famille de variables logiques $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, introduisons deux petites notations :

$$\bigwedge_{i=0}^{n} A_i = A_0 \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n = A_n \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} A_i$$

et son dual

$$\bigvee_{i=0}^{n} A_i = A_0 \vee A_1 \vee \cdots \vee A_n = A_n \vee \bigvee_{i=0}^{n-1} A_i$$

C'est à rapprocher de la notation $\sum_{i=0}^{n}$ à la différence qu'on utilise $\wedge$ ou $\vee$ au lieu de $+$.

Étant donnée une variable logique B et une famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, une clause de HORN est une formule de la forme

$$\left(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i\right) \Rightarrow B$$

où $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera H_n la formule $\left(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i\right) \Rightarrow B$.

Des exemples de clauses de HORN :

— H_0 : $A_0 \Rightarrow B$
— H_1 : $(A_0 \wedge A_1) \Rightarrow B$
— H_2 : $(A_0 \wedge A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B$
— ...

1. Montrer que $H_0 \equiv (\neg A_0) \vee B$.

> **Solution:** C'est la définition de l'implication.

2. Montrer que $H_1 \equiv (\neg A_0) \vee (\neg A_1) \vee B$.

Solution: On a

$$\begin{aligned} H_1 &= (A_0 \wedge A_1) \Rightarrow B \\ &\equiv (\neg(A_0 \wedge A_1)) \vee B \\ &\equiv (\neg A_0) \vee (\neg A_1) \vee B \end{aligned}$$

3. Montrer que $H_2 \equiv (\neg A_0) \vee (\neg A_1) \vee (\neg A_2) \vee B$. Il est conseillé d'éviter la table de vérité, étant donné le nombre de variables.

Solution: On a

$$\begin{aligned} H_2 &= (A_0 \wedge A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B \\ &\equiv (\neg(A_0 \wedge A_1 \wedge A_2)) \vee B \\ &\equiv (\neg A_0) \vee (\neg(A_1 \wedge A_2)) \vee B \\ &\equiv (\neg A_0) \vee (\neg A_1) \vee (\neg A_2) \vee B \end{aligned}$$

4. Plus généralement, on aimerait prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \left(\bigvee_{i=0}^{n} \neg A_i\right) \vee B$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n \equiv \left(\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i\right)\right) \vee B$.

   Solution: On a $\psi \Rightarrow \varphi \equiv (\neg\psi) \vee \varphi$. Dans notre cas, $\psi = \bigwedge_{i=0}^{n} A_i$ et $\varphi = B$.

   (b) Montrer par récurrence sur que $\forall n \in \mathbb{N}, \neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i\right) \equiv \bigvee_{i=0}^{n} (\neg A_i)$. On pourra utiliser l'expression tout à droite des définitions de $\bigwedge$ et $\bigvee$. On reconnaît une généralisation des lois de De Morgan.

Solution:

- Pour $n = 0$, on a à gauche $\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i\right) = \neg A_0$ et à droite $\bigvee_{i=0}^{n}(\neg A_i) = \neg A_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i\right) \equiv \bigvee_{i=0}^{n}(\neg A_i)$. On veut prouver $\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n+1} A_i\right) \equiv \bigvee_{i=0}^{n+1}(\neg A_i)$.

$$
\begin{aligned}
\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n+1} A_i\right) &= \neg\left(\left(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i\right) \wedge A_{n+1}\right) \\
&\equiv \neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i\right) \vee \neg A_{n+1} \\
&\equiv \left(\bigvee_{i=0}^{n} \neg A_i\right) \vee \neg A_{n+1} \\
&\equiv \left(\bigvee_{i=0}^{n+1} \neg A_i\right)
\end{aligned}
$$

(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \left(\bigvee_{i=0}^{n} \neg A_i\right) \vee B$.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. $H_n \equiv \left(\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i\right)\right) \vee B \equiv \left(\bigvee_{i=0}^{n}(\neg A_i)\right) \vee B$.

2 Plus de connecteurs

1. On définit le connecteur logique $\oplus$ (appelé « xor », « ou exclusif » ou « disjonction exclusive ») par

$$A \oplus B := ((\neg A) \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B))$$

Montrer que $A \oplus B \equiv \neg(A \Leftrightarrow B)$.

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[A \oplus B]_\sigma$	$[\neg(A \Leftrightarrow B)]_\sigma$
ff	ff	ff	ff
ff	tt	tt	tt
tt	ff	tt	tt
tt	tt	ff	ff

2. On définit le connecteur INH (appelé « inhibiteur ») par

$$A \text{ INH } B := A \wedge (\neg B)$$

Donner la table de vérité de INH. Je vous laisse méditer après l'exam sur son sens profond.

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[\neg B]_\sigma$	$[A \text{ INH } B]_\sigma$
ff	ff	tt	ff
ff	tt	ff	ff
tt	ff	tt	tt
tt	tt	ff	ff

3 -jectivité

1. Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$. On suppose que $\forall x \in E, f \circ f(x) = x$ ie. $f \circ f = Id_E$. Montrer que f est bijective.

Solution: Id_E est bijective, donc f est injective (à droite) et surjective (à gauche), donc bijective.

2. Soit A un ensemble. Soit

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P}(A) &\to \mathcal{P}(A) \\ X &\mapsto \complement_A X \end{aligned}$$

On rappelle que $\complement_A X$ est le complémentaire de X dans A, ie $A \setminus X$. Calculer $g \circ g$ et en déduire que g est bijective.

Solution: Soit $X \in \mathcal{P}(A)$. $g \circ g(X) = g(g(X)) = \complement_A \complement_A X = X$. Donc $g \circ g = Id_{\mathcal{P}(A)}$ donc g est bijective.

3. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, ie. les nombres qu'on peut écrire comme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $1 - x \in \mathbb{Q}$.

   Solution: Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$. On a

$$\begin{aligned} 1 - x &= 1 - \frac{p}{q} \\ &= \frac{q-p}{q} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

   (b) Soit

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h \circ h(x) = x$ par disjonction de cas.

   Solution: Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie deux cas.
   - $x \in \mathbb{Q}$. On sait que $h(x) = 1 - x \in \mathbb{Q}$. Donc, $h(h(x)) = h(1-x) = 1 - (1 - x) = x$.
   - $x \notin \mathbb{Q}$. Donc $h(h(x)) = h(x) = x$.

   (c) En déduire que h est bijective.

Solution: Comme précédemment.