Élements de la théorie des ensembles

Jérôme Feret
DI (INRIA,ÉNS,CNRS)

9–22 octobre 2014

1. Soient A et B deux ensembles.
   (a) Quels sont les ensembles X tels que $A \cup X = B \cap X$?
   (b) Quels sont les ensembles X tels que $A \cup X = B \backslash X$?
2. Soient A, B, et C trois ensembles. Soit f une fonction entre l'ensemble A et l'ensemble B, et g une fonction entre l'ensemble B et l'ensemble C.
   (a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
   (b) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
3. Supposons que H l'ensemble de tous les ensembles existe.
   Nous définissons l'ensemble F suivant :
   $$F \triangleq \{E \in H \mid E \notin E\}.$$
   Montrer que :
   (a) $F \in F \Rightarrow F \notin F$;
   (b) $F \notin F \Rightarrow F \in F$.
   Qu'en concluez-vous ?
4. L'hôtel de Hilbert est un peu particulier. Il possède une infinité de chambres numérotées de 1 à l'infini. Chaque chambre peut accueillir une seule famille. L'hôtelier est efficace et accommodant, en cas de besoin, il peut déplacer simultanément les occupants des chambres vers d'autres chambres (bien entendu sans jamais mettre deux familles dans la même chambre), et ce quelque soit la distance entre les chambres et le nombre de familles à déplacer.
   (a) L'hôtel est plein et une nouvelle famille arrive. Pourtant l'hôtelier parvient à la loger dans une chambre, comment fait il ?
   (b) L'hôtel est plein et un bus contenant une infinité de familles numérotés de 1 à l'infini arrive. L'hôtelier loge tout le monde, comment fait il ?
   (c) L'hôtel est vide, mais une infinité de bus numérotés de 1 à l'infini arrive avec chacun un ensemble infini de familles numérotées de 1 à l'infini. Pas de soucis pour l'hôtelier, comment fait il ?
   (d) Un nombre infini de bus arrive. Chaque bus à un nombre infini de passagers numérotés de 1 à l'infini. Chaque passager à un bulletin blanc ou noir. Toutes les combinaisons (le premier passager a un bulletin blanc, tous les autres ont un noir ; le deuxième passager a un bulletin blanc, tous les autres ont un boit ; seuls les deux premiers passagers a un bulletin blanc, ...). Par chance, seuls les chauffeurs de bus ont besoin d'une chambre. Cependant, malgré la meilleure volonté de l'hôtelier, il n'arrive pas à trouver une solution, pourquoi ?
5. Soit E un ensemble et $P(x \in E)$ un prédicat portant sur un élément $x \in E$ de l'ensemble E. Parmi les assertions suivantes, laquelle/lesquelles est/sont toujours vraie/vraies :
   (a) $[\forall x \in E, (P(x) \wedge P(x))] \Rightarrow [\forall x \in E, (P(x) \vee P(x))]$;

(b) $[\exists x \in E, P(x)] \Rightarrow [\exists x \in E, P(x) \wedge P(x)]$.

6. Soit E un ensemble et $P(x \in E, y \in E)$ un prédicat portant sur deux éléments $x \in E$ et $y \in E$ de l'ensemble E. Parmi les assertions suivantes, laquelle/lesquelles est/sont toujours vraie/vraies :
   (a) $((\exists x \in E, \forall y \in E, P(x,y)) \Rightarrow (\forall x \in E, \exists y \in E, P(x,y)))$;
   (b) $((\exists x \in E, \forall y \in E, P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in E, \exists x \in E, P(x,y)))$;
   (c) $((\exists x \in E, \forall y \in E, P(x,y)) \Rightarrow (\exists y \in E, \exists x \in E, P(x,y)))$;
   (d) $((\forall x \in E, \exists y \in E, P(x,y)) \Rightarrow (\exists x \in E, \forall y \in E, P(x,y)))$;
   (e) $((\forall x \in E, \exists y \in E, P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in E, \exists x \in E, P(x,y)))$;
   (f) $((\forall x \in E, \exists y \in E, P(x,y)) \Rightarrow (\exists y \in E, \exists x \in E, P(x,y)))$.
7. Montrer que le somme des carrés des entrées entre 1 et n est égale à :

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2{\cdot}n+1)}{6}.$$