

Quiz sur le calcul propositionnel et la théorie des ensembles

Jérôme Feret
DI (INRIA, ÉNS, CNRS)

23 octobre 2014

1. Parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont vraies ?

(On rappelle que le symbole ' \emptyset ' représente l'ensemble vide, le symbole ' \in ' représente la relation d'appartenance, et le symbole ' \subseteq ' la relation d'inclusion.)

- (a) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (b) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (c) $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (d) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (e) $1 \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (f) $\{1\} \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (g) $1 \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (h) $\{1\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (i) $2 \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (j) $\{2\} \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (k) $2 \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
- (l) $\{2\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$;

2. Soient A et B deux variables propositionnelles.

La propriété suivante est-elle vraie ?

(On donnera une preuve du résultat.)

$$(A \Rightarrow ((\neg A) \wedge B)) \equiv ((\neg B) \Rightarrow (B \wedge (\neg A)));$$

3. La propriété suivante est-elle vraie ?

(On donnera une preuve sans utiliser de table de vérité.)

$$\left(\begin{array}{l} \text{si } A \text{ alors} \\ \text{sinon} \end{array} \left(\begin{array}{l} \text{si } B \text{ alors} \\ \text{sinon} \end{array} \left(\begin{array}{l} \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \perp \\ \text{si } C \text{ alors } \perp \\ \text{sinon } \perp \\ \text{si } B \text{ alors} \\ \text{sinon} \end{array} \left(\begin{array}{l} \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \perp \\ \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \perp \end{array} \right) \right) \right) \right) \equiv \left(\begin{array}{l} \text{si } A \text{ alors} \\ \text{sinon} \end{array} \left(\begin{array}{l} \text{si } B \text{ alors} \\ \text{sinon} \end{array} \left(\begin{array}{l} \text{si } C \text{ alors } \perp \\ \text{sinon } \perp \\ \text{si } C \text{ alors } \perp \\ \text{sinon } \perp \\ \text{si } B \text{ alors} \\ \text{sinon} \end{array} \left(\begin{array}{l} \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \perp \\ \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \perp \end{array} \right) \right) \right) \right);$$

4. Soit E un ensemble, et $p(x \in E)$ un prédicat portant sur E .

La propriété suivante est-elle vraie ?

(On donnera une preuve du résultat en détaillant toutes les étapes du raisonnement)

$$(\forall x \in E. p(x \in E)) \Rightarrow (\forall x \in E. ((\neg p(x \in E)) \Rightarrow p(x \in E)));$$

5. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
(On donnera une preuve du résultat).

(a) $\begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \{0\} \\ n \mapsto 0 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 0 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} n + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n - 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$.