Quizz sur le calcul propositionnel et la théorie des ensembles

Jérôme Feret
DI (INRIA,ÉNS,CNRS)

23 octobre 2014

1. Parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont vraies ?
   (On rappelle que le symbole '$\emptyset$' représente l'ensemble vide, le symbole '$\in$' représente la relation d'appartenance, et le symbole '$\subseteq$' la relation d'inclusion.)
   (a) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (b) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (c) $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (d) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (e) $1 \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (f) $\{1\} \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (g) $1 \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (h) $\{1\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (i) $2 \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (j) $\{2\} \in \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (k) $2 \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$,
   (l) $\{2\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$;

   Correction.
   Notons X l'ensemble $\{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$.
   Nous remarquons que X a trois éléments :
   — l'élément $\{\emptyset\}$, qui est un singleton formé de l'unique élément $\emptyset$,
   — l'élément 1,
   — l'élément $\{2\}$, qui est le singleton formé uniquement de l'élément 2.
   De plus, comme X a trois éléments, il a 2^3, soit 8 parties. Ainsi, l'ensemble des parties de X, $\wp(X)$, a les 8 éléments suivant :
   — l'élément $\emptyset$, qui est l'ensemble vide,
   — l'élément $\{\{\emptyset\}\}$, qui est le singleton formé par l'unique élément $\{\emptyset\}$,
   — l'élément $\{1\}$, qui est un singleton formé par l'unique élément 1,
   — l'élément $\{\{2\}\}$, qui est un singleton formé par l'unique élément $\{2\}$,
   — l'élément $\{\{\emptyset\}, 1\}$,
   — l'élément $\{\{\emptyset\}, \{2\}\}$,
   — l'élément $\{1, \{2\}\}$,
   — l'élément $\{\{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$.
   Du coup, seuls les propriétés, b, c, e, h, et j sont vraies. $\square$

2. Soient A et B deux variables propositionnelles.
La propriété suivante est-elle vraie ?
(On donnera une preuve du résultat.)

$$(A \Rightarrow ((\neg A) \wedge B)) \equiv ((\neg B) \Rightarrow (B \wedge (\neg A)));$$

Correction.
Soit σ l'environnement $((A, \text{vrai}), (B\text{vrai}))$.
Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} [A]_\sigma & = & \text{vrai} \\ [B]_\sigma & = & \text{vrai} \\ [\neg A]_\sigma & = & \text{faux} \\ [(\neg A) \wedge B]_\sigma & = & \text{faux} \\ [(A \Rightarrow ((\neg A) \wedge B))]_\sigma & = & \text{faux} \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{c} [A]_\sigma = \text{vrai} \\ [B]_\sigma = \text{vrai} \\ [\neg B]_\sigma = \text{faux} \\ [((\neg B) \Rightarrow (B \wedge (\neg A)))]_\sigma \quad = \quad \text{vrai} \end{array}$$

Donc : $[(A \Rightarrow ((\neg A) \wedge B))]_\sigma \neq [((\neg B) \Rightarrow (B \wedge (\neg A)))]_\sigma$.
Puis $(A \Rightarrow ((\neg A) \wedge B)) \not\equiv ((\neg B) \Rightarrow (B \wedge (\neg A)))$.
$\square$

3. La propriété suivante est-elle vraie ?
(On donnera une preuve sans utiliser de table de vérité.)

$$\left(\begin{array}{rl} \text{si } A \text{ alors} & \left(\begin{array}{rl} \text{si } B \text{ alors} & \left(\begin{array}{r} \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \bot \end{array}\right) \\ \text{sinon} & \left(\begin{array}{r} \text{si } C \text{ alors } \bot \\ \text{sinon } \bot \end{array}\right) \end{array}\right) \\ \text{sinon} & \left(\begin{array}{rl} \text{si } B \text{ alors} & \left(\begin{array}{r} \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \bot \end{array}\right) \\ \text{sinon} & \left(\begin{array}{r} \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \bot \end{array}\right) \end{array}\right) \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rl} \text{si } A \text{ alors} & \left(\begin{array}{rl} \text{si } B \text{ alors} & \left(\begin{array}{r} \text{si } C \text{ alors } \bot \\ \text{sinon } \bot \end{array}\right) \\ \text{sinon} & \left(\begin{array}{r} \text{si } C \text{ alors } \bot \\ \text{sinon } \bot \end{array}\right) \end{array}\right) \\ \text{sinon} & \left(\begin{array}{rl} \text{si } B \text{ alors} & \left(\begin{array}{r} \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \bot \end{array}\right) \\ \text{sinon} & \left(\begin{array}{r} \text{si } C \text{ alors } \top \\ \text{sinon } \bot \end{array}\right) \end{array}\right) \end{array}\right);$$

Correction.
Ces deux formules sont sous forme canonique pour l'ordre $A<B<C$. Or elles sont syntaxiquement différentes, elles sont donc sémantiquement différentes ;$\square$

4. Soit E un ensemble, et $p(x \in E)$ un prédicat portant sur E.
La propriété suivante est-elle vraie ?
(On donnera une preuve du résultat en détaillant toutes les étapes du raisonnement)

$$(\forall x \in E.p(x \in E)) \Rightarrow (\forall x \in E.((\neg p(x \in E)) \Rightarrow p(x \in E)));$$

Correction.
On suppose que la formule $(\forall x \in E.p(x \in E))$ est une tautologie.
Soit t un élément de E,
on suppose que la formule $\neg p(t)$ est une tautologie,
on a $t \in E$ et la formule $(\forall x \in E.p(x))$ est une tautologie,
donc la formule $p(t)$ est une tautologie,

Ainsi la formule $(\neg p(t)) \Rightarrow p(t)$ *est une tautologie.*

Donc la formule $\forall x \in E.((\neg p(x \in E)) \Rightarrow p(x \in E))$ *est une tautologie.*

Et donc le formule $(\forall x \in E.p(x \in E)) \Rightarrow (\forall x \in E.((\neg p(x \in E)) \Rightarrow p(x \in E)))$ *est une tautologie.*□

5. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
   (On donnera une preuve du résultat).

   (a) $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \{0\} \\ n \mapsto 0 \end{cases}$,

   Correction.

   i. *On a* $f(1) = 0$ *et* $f(2) = 0$, *donc* f *n'est pas injective.*
   ii. *Soit* n *un élément de* $\{0\}$.
       On a $n = 0$ *et* $f(0) = 0$.
       Donc $f(0) = n$.
     Donc f *est surjective.*

   □

   (b) $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 0 \end{cases}$,

   Correction.

   i. *On a* $g(1) = 0$ *et* $g(2) = 0$, *donc* g *n'est pas injective.*
   ii. *Soit* n *un élément de* $\mathbb{N}$ *tel que* $g(n) = 1$.
     On a $g(n) = 0$, *puis* $0 = 1$, *ce qui est absurde.*
     Ainsi 1 *n'a pas d'antécédent par* g *et* g *n'est pas surjective.*

   □

   (c) $h : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$.

   Correction.

   i. *Soit* $m, n \in \mathbb{N}$ *tels que* $h(m) = h(n)$.
     Deux cas :
     A. *si* $h(m)$ *est pair.*
       Alors m *et* n *sont impairs.*
       Puis $h(n) = n - 1$ *et* $h(m) = m - 1$.
       D'où $n = h(n) + 1$ *et* $m = h(m) + 1$.
       Or $h(n) = h(m)$, *d'où* $m = n$.

B. *si* $h(m)$ *est impair.*
Alors m *et* n *sont pairs.*
Puis $h(n) = n + 1$ *et* $h(m) = m + 1$.
D'où $n = h(n) - 1$ *et* $m = h(m) - 1$.
Or $h(n) = h(m)$, *d'où* $m = n$.

Dans les deux cas, $m = n$.
Donc $m = n$.
Puis h *est injective.*

ii. *Soit* $n \in \mathbb{N}$
Deux cas :

A. *si* n *est pair,*
$(n + 1)$ *est impair,*
puis $h(n + 1) = (n + 1) - 1$,
d'où $h(n + 1) = n$.

B. *si* n *est impair,*
$(n - 1)$ *est pair,*
puis $h(n - 1) = (n - 1) + 1$,
d'où, $h(n - 1) = n$.

Dans les deux cas, il existe un entier m *tel que* $h(m) = n$. *Donc* h *est surjective.*

Donc h *est bijective.*$\square$