Test de théorie des ensembles

Beaucoup de réponses sont évidentes, on n'attend pas vraiment de justifications.

1. Écrire explicitement $\{1,2\} \cup \{2,3\}$

   Solution: $\{1,2,3\}$

2. Écrire explicitement $\{1,2\} \cap \{2,3\}$

   Solution: $\{2\}$

3. Écrire explicitement $\{1,2\} \setminus \{2,3\}$

   Solution: $\{1\}$

4. Écrire explicitement $\{1,2\}\Delta\{2,3\}$

   Solution: $\{1,3\}$

5. Donner le cardinal de $\{1,2,3\}$.

   Solution: $\{1,2,3\}$ a 3 éléments.

6. Donner le cardinal de $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

   Solution: $\{1,2,3\}$ a 3 éléments, donc l'ensemble de ses parties a $2^3 = 8$ éléments.

7. Écrire explicitement $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

   Solution:

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

8. Écrire explicitement $[\![5,8]\!]$.

Solution:

$$[\![5,8]\!] = \{5,6,7,8\}$$

9. Écrire explicitement $[7,12] \setminus]7,12[$.

Solution:

$$[7,12] \setminus]7,12[= \{7,12\}$$

10. Donner à chaque fois un exemple (celui que vous préférez) d'élément de

    (a) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

    Solution:

    $$(0,0)$$

    (b) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^2$

    Solution:

    $$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

    (c) $\{42\}^3$

    Solution:

    $$(42,42,42)$$

11. On se donne A et B des ensembles quelconques. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ?

    (a) $A \cup B = B \cup A$

    Solution: Oui.

    (b) $A \cap B = B \cap A$

Solution: Oui.

(c) $A \setminus B = B \setminus A$

Solution: Non.

(d) $\emptyset \in \{\emptyset, 1, \{2\}\}$

Solution: Oui.

(e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset, 1, \{2\}\}$

Solution: Oui.

(f) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, 1, \{2\}\}$

Solution: Non.

(g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, 1, \{2\}\}$

Solution: Oui.

(h) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \times B)$. Ici, une explication (si oui) ou un contre-exemple (si non) est appréciable.

Solution: Non. Si $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\} \times \{\emptyset, \{2\}\} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{2\}), (\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{2\})\}$.
Mais $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(\{(1,2)\}) = \{\emptyset, \{(1,2)\}\}$.