Test de récurrence

1. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$S_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + 2^{-(n+1)}$$

   Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 1 - 2^{-n}$$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 5^n \geqslant 4^n + 3^n$.
3. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et une fonction f dérivable n fois, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f, c'est à dire la fonction qu'on obtient en dérivant f n fois. On peut l'écrire.

$$f^{(0)} = f$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = {f^{(n)}}'$$

   Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(ax) \end{aligned}$$

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n \exp(ax)$.