Test de récurrence

1. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$S_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + 2^{-(n+1)}$$

Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 1 - 2^{-n}$$

Solution: On prouve notre prédicat par récurrence sur $\mathbb{N}$.
— Pour $n = 0$. On a $S_0 = 0 = 1 - 1 = 1 - 2^0 = 1 - 2^{-n}$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n. On a donc

$$\begin{aligned} S_n &= 1 - 2^{-n} \\ S_{n+1} &= 1 - 2^{-n} + 2^{-(n+1)} \\ &= 1 - 2 \cdot 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} \\ &= 1 - 2^{-(n+1)} \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang suivant.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 1 - 2^{-n}$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, 5^n \geqslant 4^n + 3^n$.

Solution: On prouve notre prédicat par récurrence sur $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
— Pour $n = 2$, on a $5^2 = 25$ et $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$. Donc $P(2)$.

— Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose $P(n)$.

$$\begin{aligned} 5^n \geqslant 4^n + 3^n \Rightarrow 5^{n+1} &\geqslant 5(4^n + 3^n) \\ &\geqslant 4(4^n + 3^n) \\ &\geqslant 4(4^n + 3^n) \\ &\geqslant 4^{n+1} + 4 \cdot 3^n \\ &\geqslant 4^{n+1} + 3 \cdot 3^n \\ &\geqslant 4^{n+1} + 3^{n+1} \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

3. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et une fonction f dérivable n fois, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f, c'est à dire la fonction qu'on obtient en dérivant f n fois. On peut l'écrire.

$$f^{(0)} = f$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = f^{(n)\prime}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(ax) \end{aligned}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \ \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n \exp(ax)$.

Solution: Montrons $P(n) : \forall x \ \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n \exp(ax)$ sur $\mathbb{N}$.

— Pour $n = 0$, on a $f^{(0)}(x) = f(x) = \exp(ax) = a^0 \exp(ax)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$. On a donc $\forall x \ \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n \exp(ax)$

sur $\mathbb{N}$. On dérive $f^{(n)}$.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\ &= (a^n \exp(ax))' \\ &= a^n(\exp(ax)') \\ &= a^n(a \exp(ax)) \\ &= a^{n+1} \exp(ax) \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n \exp(ax)$.